



**Eigenvalues of transformations arising from irrational rotations and step functions. (Valeurs propres de transformations liées aux rotations irrationnelles et aux fonctions en escalier)**

Melanie Guenais, Francois Parreau

► **To cite this version:**

Melanie Guenais, Francois Parreau. Eigenvalues of transformations arising from irrational rotations and step functions. (Valeurs propres de transformations liées aux rotations irrationnelles et aux fonctions en escalier). 2006. hal-00067970

**HAL Id: hal-00067970**

**<https://hal.science/hal-00067970>**

Preprint submitted on 9 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Valeurs propres de transformations liées aux rotations  
irrationnelles et aux fonctions en escalier.  
Eigenvalues of transformations arising from irrational  
rotations and step functions.

Mélanie Guenais et François Parreau

10 mai 2006

Laboratoire de Mathématiques, équipe de Topologie et Dynamique, UMR 8628 du  
CNRS,

Université PARIS-SUD, 91400 Orsay. e-mail : Melanie.Guenais@math.u-psud.fr

Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539 du CNRS,

Université PARIS 13, 93430 Villetaneuse. e-mail : parreau@math.univ-paris13.fr

**Abstract.**

Given an irrational rotation  $T$  on  $\mathbb{T}$  we settle necessary and sufficient conditions on a step function  $\phi$  and  $t \in \mathbb{T}$  for the existence of measurable solutions to the cohomological equation

$$\exp(2i\pi\phi) = e^{2i\pi t} f / f \circ T.$$

This yields a characterization of eigenvalues and eigenfunctions for several transformations arising from irrational rotations and step functions : cylinder flows, special flows, induced maps...

From there we give constructions of special flows and three-interval exchange transformations with unusual spectral properties. In both cases we exhibit examples with Kronecker factors of infinite rank. We also construct three-interval exchange transformations which are non-trivially conjugate to irrational rotations or to odometers. Similarly there exist special flows over irrational rotations which are non-trivially conjugate to translations flows on  $\mathbb{T}^2$  or on solenoids.

Finally, we prove a regularization property which allows us to give similar examples of special flows with smooth ceiling functions, under natural Diophantine conditions for the rotation.

**Résumé.**

Soit  $T$  une rotation irrationnelle de  $\mathbb{T}$ . Nous établissons des conditions nécessaires et suffisantes sur une fonction en escalier  $\phi$  et  $t \in \mathbb{T}$  pour que l'équation

$$\exp(2i\pi\phi) = e^{2i\pi t} f / f \circ T$$

admette une solution mesurable.

Ceci donne une caractérisation des valeurs propres et fonctions propres de systèmes dynamiques tels que les échanges de trois intervalles et certains flots

spéciaux. À partir de là nous en donnons différentes constructions avec des propriétés très particulières. Nous montrons d'abord que ces systèmes peuvent admettre un facteur de Kronecker de rang infini. Nous contruisons ensuite des échanges de trois intervalles conjugués non trivialement à une rotation irrationnelle ou à un odomètre, et des flots spéciaux conjugués non trivialement à un flot de translations sur  $\mathbb{T}^2$  ou sur un solénoïde.

Enfin nous montrons une propriété de régularisation qui permet d'obtenir les mêmes exemples de flots spéciaux avec des fonctions plafond régulières, sous des conditions naturelles d'approximation diophantienne.

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Présentation générale</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>4</b>
1.1	L'équation de cohomologie. . . . .	4
1.2	Application aux flots spéciaux. . . . .	7
1.3	Applications aux échanges de 3 intervalles. . . . .	10
1.4	Plan de l'article. . . . .	11
<b>2</b>	<b>Préliminaires.</b>	<b>12</b>
2.1	Des notations et définitions . . . . .	12
2.1.1	Cocycles. Les quasi-cobords triviaux . . . . .	12
2.1.2	Fraction continue et développements d'Ostrowski . . . . .	13
2.1.3	Tours de la translation . . . . .	14
2.2	Outils et schéma de la preuve du théorème 1. . . . .	15
2.2.1	Principe – approximations de $\beta$ et $t$ . . . . .	15
2.2.2	Description de la suite des fonctions de transfert. . . . .	16
2.2.3	Pourquoi les conditions du théorème 1 suffisent-elles? . . . . .	17
2.2.4	Pourquoi ces conditions sont-elles nécessaires? . . . . .	18
2.3	Les tours de la rotation . . . . .	19
2.3.1	Représentation sur $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ . . . . .	19
2.3.2	Une suite de domaines fondamentaux privilégiée. . . . .	20
2.3.3	$\ \beta q_n\ $ dans un domaine fondamental d'ordre $n$ . . . . .	21
2.4	Quelques relations utiles . . . . .	22
<b>II</b>	<b>L'équation de cohomologie pour les fonctions en escalier.</b>	<b>26</b>
<b>3</b>	<b>Cas des fonctions à deux discontinuités.</b>	<b>26</b>
3.1	Conditions nécessaires. . . . .	26
3.2	Des conditions suffisantes. . . . .	33
<b>4</b>	<b>Cas général des fonctions en escalier.</b>	<b>34</b>
4.1	Conditions nécessaires. . . . .	34
4.1.1	Décomposition d'Ostrowski. . . . .	34
4.1.2	Représentation. Choix des Domaines Fondamentaux. . . . .	38
4.1.3	Convergence forte des fonctions de transfert. . . . .	38

4.1.4	Récurrence. . . . .	39
4.2	Réciproque . . . . .	44
<b>III Constructions de facteurs discrets pour des flots spéciaux et des échanges de 3 intervalles.</b>		<b>46</b>
<b>5</b>	<b>Généralités, Tours de Kakutani.</b>	<b>46</b>
5.1	Valeurs propres et fonctions propres des différentes transformations.	46
5.1.1	Flots spéciaux. . . . .	46
5.1.2	Échanges de 3 intervalles. . . . .	46
5.1.3	Tours de Kakutani . . . . .	47
5.2	Les conditions (*). . . . .	47
5.2.1	Définition. . . . .	47
5.2.2	Notations et ordres de grandeurs. . . . .	48
<b>6</b>	<b>Groupe de valeurs propres de rang infini.</b>	<b>49</b>
6.1	Première construction de valeurs propres non triviales. . . . .	50
6.2	Construction avec $r$ valeurs propres rationnellement indépendantes.	52
6.2.1	Critères d'indépendance. . . . .	53
6.2.2	Construction pour $T_{\alpha,\beta}$ . . . . .	54
6.2.3	Construction pour $\tau_{\alpha,\beta,\gamma}$ . . . . .	56
6.3	Une infinité de valeurs propres indépendantes. . . . .	57
<b>7</b>	<b>Constructions de flots spéciaux et d'échanges de 3 intervalles à spectre purement discret.</b>	<b>58</b>
7.1	Constructions avec facteur de Kronecker explicite. . . . .	58
7.1.1	Analyse de la construction. . . . .	59
7.1.2	Construction. . . . .	60
7.2	Tours de Kakutani et odomètres. . . . .	63
7.2.1	Construction d'odomètres. . . . .	63
7.2.2	Injectivité des fonctions propres sur l'odomètre. . . . .	65
7.2.3	Les odomètres comme tours de Kakutani. . . . .	67
7.3	Isomorphismes non triviaux avec des rotations irrationnelles. . .	68
7.3.1	Construction, propriétés diophantiennes de la valeur propre.	68
7.3.2	Tours de Kakutani conjuguées à une rotation. . . . .	70
7.3.3	Des rotations comme tours de Kakutani. . . . .	72
<b>8</b>	<b>Régularisation des flots spéciaux.</b>	<b>74</b>
8.1	Notations . . . . .	74
8.2	Critères de cohomologie et de régularité. . . . .	75
8.3	Preuve de la proposition 10. . . . .	76
8.3.1	$\phi_\beta$ cohomologue à une fonction de $C^r(\mathbb{T})$ . . . . .	76
8.3.2	$\phi_\beta$ cohomologue à une fonction analytique. . . . .	76
8.4	Preuve des parties régulières des théorèmes 3 et 4. . . . .	78
<b>9</b>	<b>Appendice. Les sous-groupes <math>H_\gamma(\alpha)</math> des approximations par les fractions continues.</b>	<b>78</b>

# Première partie

## Présentation générale

### 1 Introduction.

#### 1.1 L'équation de cohomologie.

On note  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{T}$ . Le point de départ de ce travail est une caractérisation, étant donné un irrationnel  $\alpha$  de  $\mathbb{T}$ , des triplets  $(\beta, s, t) \in [0, 1[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$  pour lesquels il existe une fonction mesurable  $f$  non nulle satisfaisant pour presque tout  $x \in \mathbb{T}$ , l'égalité

$$\exp(2i\pi s \mathbf{1}_{[0, \beta[}(x)) = e^{2i\pi t} \frac{f(x)}{f(x + \alpha)} \quad (1)$$

Ce problème s'inscrit dans l'étude plus générale des équations de cohomologie

$$e^{2i\pi\phi} = e^{2i\pi t} \frac{f}{f \circ T}. \quad (2)$$

Ici  $T$  désignera toujours la translation de  $\alpha$  sur  $\mathbb{T}$  et  $\phi$  une fonction réelle mesurable sur  $\mathbb{T}$ . On appelle quasi-cobords les fonctions  $e^{2i\pi\phi}$  cohomologues à une constante, c'est-à-dire pour lesquelles l'équation (2) admet des solutions  $(f, t)$  avec  $f$  mesurable non nulle et  $t$  constante, et lorsque  $t = 0$  on parle de cobords. Comme  $T$  est ergodique, toute fonction  $f$  satisfaisant (2) est de module constant, et par conséquent il suffit d'étudier l'existence de solutions avec des fonctions  $f$  de module 1.

Cette équation est l'équation aux valeurs propres de l'opérateur de  $L^2(\mathbb{T})$  défini par  $V_\phi(f) = e^{2i\pi\phi} f \circ T$ . Elle intervient naturellement dans l'étude de l'ergodicité et des valeurs propres des extensions de la rotation par un groupe abélien métrisable compact (cf [1], [25]).

L'équation (1) apparaît pour la première fois en théorie ergodique en 1967 dans [11] (ou [12]), avec  $s = \frac{1}{2}$  : il s'agit de montrer que l'extension à 2 points associée à  $\mathbf{1}_{[0, \beta[}$  au dessus d'une rotation irrationnelle d'angle  $\alpha$  (définie pour  $(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  par  $S_\beta(x, y) = (Tx, y + \mathbf{1}_{[0, \beta[}(x) \bmod 2)$ ) est faiblement mélangeante (et en particulier ergodique) pour presque tout  $\beta$ .

Une étude plus approfondie est faite par W. Veech dans [28] en 1969 : il énonce des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution de l'équation (1) lorsque  $s = 1/2$ . Il prouve l'ergodicité ou la non-ergodicité de  $S_\beta$  sous des conditions arithmétiques sur  $\alpha$  et  $\beta$ , sans toutefois donner de condition nécessaire et suffisante. Ces résultats ont été étendus à tout  $s \in ]0, 1[$  par M. Stewart en 1981 ([27]), puis retrouvés, avec des arguments plus simples, par K. Merrill en 1985 ([20]) ; elle établit également une condition suffisante pour l'équation (2) lorsque  $\phi$  est une fonction en escalier avec 3 sauts.

Nous donnons ici une solution complète à ce problème. Fixons d'abord quelques notations :

- Pour un irrationnel  $\alpha$  de  $]0, 1[$ , on note  $(a_n)_{n \geq 1}$  les quotients partiels et  $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$  la suite des réduites de sa fraction continue ( $p_0 = 0, q_0 = 1$ ).

- Pour tout réel  $x$ , on désigne par  $\|x\|$  sa distance à l'entier le plus proche  $[x]$ , et on pose  $\langle x \rangle = x - [x]$ . On notera aussi  $[x]$  la partie entière et  $\{x\}$  la partie fractionnaire usuelles de  $x$ .
- Pour  $\beta \in [0, 1[$ , on note  $\phi_\beta$  la fonction de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\phi_\beta = \mathbf{1}_{[0, \beta[} - \beta.$$

On a aussi  $\phi_\beta(x) = \{x - \beta\} - \{x\}$  pour tout  $x \in \mathbb{T}$ , et il est naturel d'étendre la définition de  $\phi_\beta$  à tout  $\beta \in \mathbb{R}$  (ou tout  $\beta \in \mathbb{T}$ ), en posant  $\phi_\beta = \phi_{\{\beta\}}$ . Il sera plus commode de travailler avec  $\phi_\beta$  qu'avec  $\mathbf{1}_{[0, \beta[}$ , ce qui revient à changer  $t$  en  $t + s\beta$  dans l'équation.

**Théorème 1** Soient  $T$  la translation par un irrationnel  $\alpha$  sur  $\mathbb{T}$ ,  $s$  un réel non entier,  $\beta$  et  $t \in \mathbb{T}$ . Il existe  $f$  une fonction mesurable de module 1 sur  $\mathbb{T}$  vérifiant  $\lambda$ -presque partout

$$\exp(2i\pi s\phi_\beta) = e^{2i\pi t} f / f \circ T, \quad (3)$$

si et seulement si  $\beta$ ,  $s$  et  $t$  satisfont les conditions suivantes : il existe une suite d'entiers  $(b_n)$  et un entier  $k'$  tels que

$$\beta = \sum_{n \geq 0} b_n q_n \alpha \pmod{1} \quad \text{et} \quad t = k' \alpha - \sum_{n \geq 0} [b_n s] q_n \alpha \pmod{1},$$

avec

$$\sum_{n \geq 0} \frac{|b_n|}{a_{n+1}} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \|b_n s\|^2 < \infty.$$

**Remarque :** Il est bien connu (voir [26] par exemple) que tout  $\beta \in \mathbb{T}$  s'écrit de façon unique sous la forme  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n q_n \alpha$  avec  $b_n \in \{0, \dots, a_{n+1}\}$  avec  $b_{n+1} = 0$  lorsque  $b_n = a_{n+1}$  : on parle alors de décomposition d'Ostrowski. Il est plus naturel dans notre cas de choisir une décomposition symétrique (cf [28]) et la condition  $\sum |b_n|/a_{n+1} < \infty$  garantit l'unicité à un nombre fini de termes près. L'ensemble des  $\beta$  vérifiant la première condition du théorème 1 définit un sous-groupe qu'on notera  $H_1(\alpha)$ . Ce groupe peut aussi se définir au moyen d'une propriété d'approximation par les rationnels de la forme  $k_n/q_n$ . Notons plus généralement pour tout  $\gamma > 0$ ,

$$H_\gamma(\alpha) = \left\{ \sum_{n \geq 0} b_n q_n \alpha \pmod{1}, \quad (b_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \text{ et } \sum_{n \geq 0} (|b_n|/a_{n+1})^\gamma < +\infty \right\},$$

et  $H_\infty(\alpha) = \left\{ \sum_{n \geq 0} b_n q_n \alpha \pmod{1}, \quad |b_n|/a_{n+1} \rightarrow 0 \right\}$ . Nous montrerons dans l'appendice la propriété suivante :

**Proposition 1** Soit  $\alpha$  un irrationnel. On a pour tout  $\gamma > 0$

$$H_\gamma(\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{T}, \sum_n \|q_n x\|^\gamma < +\infty \right\}$$

et

$$H_\infty(\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{T}, \|q_n x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}.$$

Par abus de langage, nous noterons de la même façon les relevés de ces groupes dans  $\mathbb{R}$ . Pour l'équation (1), où  $\beta$  est un réel de  $[0, 1[$  (et non un réel modulo 1),  $s$  étant un réel non entier donné, il existe une solution si et seulement si

$\beta$  et  $t + s\beta$  satisfont les conditions du théorème 1. Lorsque  $s = 1/2$ , ou plus généralement lorsque  $s$  est rationnel, la dernière condition signifie que  $sb_n$  doit être entier pour tout  $n$  assez grand. On peut alors compléter les résultats de [27] et [28] sur les extensions finies associées à l'indicatrice d'un intervalle.

Rappelons que si  $q$  est un entier  $> 1$ , une fonction mesurable  $\phi$  à valeurs entières définit une extension à  $q$  points de  $T$  sur  $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  par  $T_{\phi,q}(x, y) = (Tx, y + \phi(x) \bmod q)$ , dont l'étude spectrale se ramène à celle des opérateurs  $V_{k\phi/q}$  pour  $0 \leq k < q$ . Elle a un spectre purement discret si et seulement si  $e^{2i\pi\phi/q}$  est un quasi-cobord et elle est ergodique si et seulement si  $e^{2i\pi k\phi/q}$  n'est un cobord pour aucun entier  $k$  non multiple de  $q$ . De là, on obtient le corollaire suivant du théorème 1 :

**Corollaire 1** Soient  $T$  la translation par un irrationnel  $\alpha$  sur  $\mathbb{T}$ ,  $\beta \in [0, 1[$  et  $q$  un entier  $> 1$ . L'extension à  $q$  points de  $T$  définie par  $\mathbf{1}_{[0, \beta[}$  admet un type spectral discret si et seulement si  $\beta \in qH_1(\alpha) + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ . Cette extension est ergodique si et seulement s'il n'existe pas de diviseur  $d > 1$  de  $q$  tel que  $\beta \in dH_1(\alpha)$ .

De façon plus générale, étant donnée une fonction mesurable réelle  $\phi$ , le groupe

$$\Sigma_\phi = \{s \in \mathbb{R}, e^{2i\pi s\phi} \text{ est un quasi-cobord}\}$$

joue un rôle dans plusieurs questions de théorie ergodique (voir par exemple [21] [17], [18]). Il est lié au groupe des valeurs propres  $e(T_\phi)$  du flot cylindrique défini sur  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  par  $T_\phi(x, y) = (Tx, y + \phi(x))$  : si  $s \in \Sigma_\phi$ , alors les constantes  $t$  correspondantes (définies modulo  $\mathbb{Z}\alpha$ ) sont des valeurs propres de  $T_\phi$  et dans le cas où  $T_\phi$  est ergodique on obtient ainsi toutes les valeurs propres de  $T_\phi$  (voir [17]).

Dans le cas où  $\phi = \phi_\beta$ , le théorème 1 donne une caractérisation du groupe  $\Sigma_\phi$  : si  $\beta \notin H_1(\alpha)$  il est réduit aux entiers et, si  $\beta = \sum_{n \geq 0} b_n q_n \alpha \in H_1(\alpha)$ ,

$$\Sigma_{\phi_\beta} = \left\{s \in \mathbb{R}, \sum_{n \geq 0} \|b_n s\|^2 < \infty\right\}.$$

C'est un groupe de type  $H_2$  au sens de [8]. D'autre part, I. Oren a montré dans [23] l'ergodicité du flot cylindrique dès que  $\beta \notin \mathbb{Z}\alpha \bmod 1$  et on obtient alors aussi une description du groupe  $e(T_{\phi_\beta})$ .

Ceci fournit en particulier des exemples pour lesquels  $e(T_\phi)$  est non dénombrable, permettant ainsi une construction de [18] :

**Corollaire 2** Pour tout irrationnel  $\alpha$  à quotients partiels non bornés, il existe des fonctions mesurables réelles  $\phi$  pour lesquelles le flot cylindrique  $T_\phi$  associé est ergodique et admet un groupe de valeurs propres non dénombrable.

Preuve : D'après ce qui précède, il suffit de vérifier qu'il existe  $\beta \in H_1(\alpha) \setminus \mathbb{Z}\alpha$  (dans  $\mathbb{T}$ ) tel que  $\Sigma_{\phi_\beta}$  ne soit pas dénombrable. Un résultat de [24] (voir aussi [8]) montre que le groupe  $\{s \in \mathbb{R}, \sum_n \|b_n s\|^2 < \infty\}$  défini par une suite d'entiers non nuls  $(b_n)$  est non dénombrable lorsque cette suite satisfait la condition de lacunarité  $\sum (b_n/b_{n+1})^2 < \infty$ . Cela reste vrai si les entiers  $b_n$  sont nuls sauf pour une sous-suite vérifiant cette condition. Quitte à choisir une sous-suite  $(n_j)$  tels que les rapports  $a_{n_{j+1}+1}/a_{n_j+1}$  des quotients partiels soient suffisamment grands, il est clair qu'on peut choisir des coefficients  $b_{n_j}$  non nuls avec  $\sum (b_{n_j}/b_{n_{j+1}})^2 < \infty$

et  $\sum |b_{n_j}|/a_{n_j+1} < \infty$ . En posant  $\beta = \sum b_{n_j} q_{n_j} \alpha$ , on obtient l'exemple cherché (le fait qu'une infinité de termes soient non nuls assure que  $\beta \notin \mathbb{Z}\alpha$ ).  $\square$

Nous étendons ensuite le théorème 1 à toutes les fonctions en escalier. On peut bien sûr se ramener au cas d'une fonction  $\phi$  d'intégrale nulle. Par cohérence avec le cas de  $\phi_\beta$ , on notera  $-s$  le saut de  $\phi$  en un point de discontinuité  $\beta$ .

**Théorème 2** Soient  $T$  la translation par un irrationnel  $\alpha$  sur  $\mathbb{T}$  et  $\phi$  une fonction réelle en escalier sur  $\mathbb{T}$  d'intégrale nulle, de sauts  $-s_j$  aux points distincts  $\beta_j$  ( $m \geq 1$ ,  $0 \leq j \leq m$ ), et soit  $t \in \mathbb{T}$ .

- On suppose qu'il existe une partition  $\mathcal{P}$  de  $\{0, \dots, m\}$  telle qu'on ait pour tout  $J \in \mathcal{P}$  et  $\beta_J \in \{\beta_j, j \in J\}$  :
  - (i) la somme  $\sum_{j \in J} s_j$  est entière,
  - (ii) pour tout  $j \in J$  il existe une suite d'entiers  $(b_n^j)_n$  telle que

$$\beta_j = \beta_J + \sum_{n \geq 0} b_n^j q_n \alpha \pmod{1}$$

$$\text{avec} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{|b_n^j|}{a_{n+1}} < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \left\| \sum_{j \in J} b_n^j s_j \right\|^2 < +\infty,$$

- (iii) il existe un entier  $k'$  tel que  $t = k' \alpha - \sum_{J \in \mathcal{P}} t_J$  où

$$t_J = \beta_J \sum_{j \in J} s_j + \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{j \in J} b_n^j s_j \right] q_n \alpha \pmod{1}.$$

Alors il existe une fonction mesurable  $f$  de module 1 satisfaisant l'équation

$$e^{2i\pi\phi} = e^{2i\pi t} \frac{f}{f \circ T}.$$

- Réciproquement lorsque  $\sum_{j \in J} s_j \notin \mathbb{Z}$  pour toute partie stricte non vide  $J$  de  $\{0, \dots, m\}$ , ces conditions sont nécessaires pour que l'équation admette une solution.

**Remarque :** Ce théorème montre qu'on peut trouver des fonctions en escalier qui sont des quasi-cobords, mais qui ne se décomposent pas en somme de quasi-cobords plus simples. Il s'applique en particulier à toutes les fonctions en escalier avec 3 sauts, ce qui améliore considérablement les conditions proposées par K. Merrill dans [20].

## 1.2 Application aux flots spéciaux.

Si  $\phi$  est une fonction mesurable strictement positive sur  $\mathbb{T}$ , on note  $\tau_{\alpha, \phi}$  le flot spécial de fonction plafond  $\phi$  au dessus de la translation irrationnelle  $T$  par  $\alpha$  ([3], [22]). On rappelle qu'on peut le définir sur le quotient de  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  par la relation d'équivalence  $(x, y + \phi(x)) \sim (Tx, y)$  par : pour tout  $(x, y) \in D_\phi$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\tau_{\alpha, \phi}^t(x, y) = (x, y + t).$$



Si on identifie ce quotient au domaine fondamental  $D_\phi = \{(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, 0 \leq y < \phi(x)\}$ , la mesure de Lebesgue restreinte à  $D_\phi$  est invariante. On supposera ici  $\phi$  intégrable et donc cette mesure finie.

Tout flot spécial  $\tau_{\alpha, \phi}$  est topologiquement conjugué à un flot linéaire de  $\mathbb{T}^2$  de direction  $(\alpha, 1)$ , noté  $R_{\alpha, 1}$ , reparamétrisé par une fonction  $\varphi > 0$  : le champ de vitesse de ce flot est égal en chaque point  $(x, y) \in \mathbb{T}^2$  à  $(\alpha/\varphi(x, y), 1/\varphi(x, y))$  et la relation entre  $\phi$  et  $\varphi$  est donnée pour tout  $x \in \mathbb{T}$  par

$$\phi(x) = \int_0^1 \varphi(x + \alpha t, t) dt.$$

Quitte à faire une homothétie de temps, on supposera toujours  $\phi$  normalisé de sorte que  $\int_{\mathbb{T}} \phi d\lambda = 1$ , ce qui permet de comparer les valeurs propres de  $\tau_{\alpha, \phi}$  à celles du flot de translations non renormalisé.

Comme les orbites du flot reparamétrisé sont celles du flot linéaire, celui-ci est toujours minimal et uniquement ergodique. Les propriétés spectrales des flots spéciaux, ou des flots linéaires reparamétrisés, dépendent de deux paramètres, la régularité de  $\phi$  (ou, ce qui revient au même, de  $\varphi$ , cf [5]), et les propriétés d'approximation diophantiennes de  $\alpha$ . De façon générale, l'absence de mélange pour des fonctions  $\varphi$  à variation bornée est classique (voir [15]), et le problème du faible mélange est donc naturel.

Le premier résultat sur les valeurs propres est dû à J. Von Neumann ([30]). Il montre le mélange faible de ces flots spéciaux lorsque  $\phi$  est absolument continue par morceaux et la somme de ses sauts est non nulle. Au contraire, lorsque  $\alpha$  est diophantien et  $\varphi \in C^\infty$ , le flot  $R_{\alpha, 1}$  reparamétrisé par  $\varphi$  est conjugué au flot linéaire  $R_{\alpha, 1}$  de  $\mathbb{T}^2$  et admet donc dans ce cas un spectre purement discret ([16]). Les études récentes de ces systèmes, dans le cas où  $\alpha$  est Liouville, montrent leur diversité spectrale : A. Katok et J. Robinson ont donné dans [10] des critères de mélange faible, la genericité du mélange faible a été établie par B. Fayad dans [4], l'existence de flots à spectre mixte avec des fonctions plafond analytiques est un résultat de B. Fayad, A. Katok et A. Windsor ([5]). En général, le problème de savoir quelles sont les valeurs propres possibles, quelle est la structure des facteurs Kronecker, ou si un tel flot peut-être isomorphe à un flot de rotation autre que  $R_{\alpha, 1}$  sont des questions anciennes ([30], [16]), qui restent d'actualité ([10], [5]).

Nous obtenons ici un certain nombre de réponses à ces questions, qui sont précisées dans le théorème 3. Avant d'en donner l'énoncé, on précise d'abord quelques notations et les liens avec le théorème 1.

Notons  $e(\tau_{\alpha, \phi})$  le sous-groupe de  $\mathbb{R}$  des valeurs propres du flot  $\tau_{\alpha, \phi}$ . Rappelons qu'un réel  $t$  est une valeur propre du flot s'il existe une fonction mesurable  $F$  non presque partout nulle vérifiant,  $F(\tau_{\alpha, \phi}^{t'} x) = e^{2i\pi t t'} F(x)$  presque partout pour tout  $t'$  réel, et que pour le flot spécial cette condition revient à une équation de cohomologie ([30], voir [10]) : on a  $t \in e(\tau_{\alpha, \phi})$  si et seulement s'il existe une fonction mesurable  $f$  non presque partout nulle satisfaisant

$$e^{2i\pi t \phi} f = f \circ T.$$

On s'intéressera d'abord au flot spécial de fonction plafond  $\phi = 1 + \gamma\phi_\beta$ , avec  $\gamma > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $\gamma\{\beta\} < 1$ , qu'on notera  $\tau_{\alpha, \beta, \gamma}$ . Les valeurs propres de ce flot sont donc exactement les réels  $t$  pour lesquels l'équation (3) avec le triplet

$(\beta, s, t)$  ou  $s = -t\gamma$  admet une solution. La construction de tels triplets et des fonctions  $f$  correspondantes fournira plusieurs exemples de flots spéciaux  $\tau_{\alpha, \beta, \gamma}$  avec des propriétés particulières de leurs valeurs propres et de leur facteur de Kronecker.

Nous établirons ensuite un résultat de régularisation (proposition 10, chapitre 8) pour montrer que ces constructions conduisent à des exemples de flots spéciaux avec des fonctions plafonds lisses. Plus précisément nous montrons, sous des conditions presque optimales d'approximation diophantienne pour  $\alpha$  et selon le développement d'Ostrowski de  $\beta$ , que  $\phi_\beta$  est cohomologue à une fonction de classe  $C^k$ , ou analytique, entraînant alors la conjugaison entre les flots spéciaux.

Avec ce dernier résultat, le théorème 1 permet déjà de retrouver le théorème 2 de [5] avec une hypothèse plus faible, et de répondre au problème de l'existence de spectres mixtes pour des nombres  $\alpha$  non Liouville :

**Corollaire 3** Pour tout  $\alpha$  irrationnel il existe des flots spéciaux au dessus de la rotation d'angle  $\alpha$  admettant un groupe cyclique de valeurs propres et donc un spectre mixte, avec de plus

- Si  $\inf_{q>0} q/(-\ln \|q\alpha\|) = 0$ , une fonction plafond analytique sur  $\mathbb{T}$ .
- Si  $\inf_{q>0} q^{k+1} \|q\alpha\| = 0$ , une fonction plafond dans  $C^k(\mathbb{T})$ .

Preuve : On considère le flot  $\tau_{\alpha, \beta, \beta^{-1}}$ , avec  $\beta > 1$ . Ses valeurs propres sont les réels  $t$  pour lesquels l'équation  $e^{2i\pi s\phi_\beta} = e^{2i\pi t} f/f \circ T$  avec  $s = -t\beta^{-1}$  admet des solutions.

Si  $t \in \mathbb{Z}\beta$  et donc  $s \in \mathbb{Z}$ , l'équation est trivialement satisfaite par les fonctions constantes (car  $s\phi_\beta = -s\beta \pmod{1}$ ) : ceci montre que  $\mathbb{Z}\beta$  est contenu dans le groupe des valeurs propres. Pour que le spectre soit mixte, il suffit d'obtenir qu'il n'y ait pas d'autres valeurs propres (car le flot spécial ne peut être conjugué à un flot de translations sur  $\mathbb{T}$ , qui admet une orbite de mesure pleine, cf [5]).

D'après le théorème 1, il n'y a pas de solutions avec  $s$  non entier lorsque  $\beta \notin H_1(\alpha)$ , ou bien lorsque  $\beta \in H_1(\alpha)$  mais que  $\{s, \sum_n \|b_n s\|^2 < \infty\}$  est trivial. On réalise cette dernière condition, en choisissant  $b_n = 0$  sauf pour une infinité de  $n$  pour lesquels  $b_n = 1$  et, selon l'hypothèse,  $q_n/(-\ln \|q_n\alpha\|)$  ou  $q_n^{k+1} \|q_n\alpha\|$  suffisamment petit. Dans chacun des cas, cela permet d'appliquer la proposition 10, qui donne le résultat souhaité.  $\square$

Le théorème suivant rassemble les autres résultats d'existence que nous obtenons pour les flots spéciaux :

**Théorème 3** Soient les propriétés, pour un flot spécial  $\tau_{\alpha, \phi}$  au dessus de la translation par un irrationnel  $\alpha$  :

- (i)  $\tau_{\alpha, \phi}$  admet une infinité de valeurs propres indépendantes.
- (ii)  $\tau_{\alpha, \phi}$  est conjugué à un flot de translations de  $\mathbb{T}^2$ , différent de  $R_{\alpha, 1}$ .
- (iii)  $\tau_{\alpha, \phi}$  est conjugué à un flot de translations sur un solénoïde.
- (i), (ii) et (iii) sont réalisables avec  $\phi \in C^\omega(\mathbb{T})$  pour tout  $\alpha$  vérifiant  $\inf_{q>1} |q \ln(q)/\ln(\|q\alpha\|)| = 0$ .
- (i), (ii) et (iii) sont réalisables avec  $\phi \in C^k(\mathbb{T})$ , pour tout  $\alpha$  vérifiant  $\inf_{q \neq 0} q^{k+2} \|q\alpha\| = 0$ .
- (i) est réalisable avec  $\tau_{\alpha, \beta, \gamma}$  pour un ensemble non dénombrable dense de  $\beta$ , pour tout  $\alpha$  tel que  $\inf_{q \neq 0} q \|q\alpha\| = 0$  et tout  $\gamma \in ]0, 1[$ .
- (ii) et (iii) sont réalisables avec  $\tau_{\alpha, \beta, \beta^{-1}}$  pour un ensemble non dénombrable dense de  $\beta > 1$  pour tout  $\alpha$  tel que  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|q\alpha\| = 0$ .

Des constructions réciproques permettent de donner des conditions sur les flots de translations entraînant qu'ils soient conjugués à des flots spéciaux :

**Théorème 4** On a les propriétés suivantes :

- (i) Tout flot de translations  $R_{s,1}$  où  $s$  vérifie  $\inf_{q>1} q^{k+2} \|qs\| = 0$  est mesurablement conjugué, à une homothétie de temps près, à un flot spécial  $\tau_{\alpha,\phi}$  avec  $\alpha \neq s$  et  $\phi \in C^k$ . Si  $\inf_{q \neq 0} |q \ln(q) / \ln \|qs\|| = 0$ , alors  $R_{s,1}$  est conjugué à un flot spécial  $\tau_{\alpha,\phi}$  avec  $s \neq \alpha$  et  $\phi \in C^\omega$ .
- (ii) Tout flot de translations sur un solénoïde est mesurablement conjugué, à une homothétie de temps près, à un flot spécial  $\tau_{\alpha,\phi}$  de fonction plafond analytique.

**Remarque :** Toutes les constructions des théorèmes 3 et 4 fournissent également des exemples pour les flots  $R_{\alpha,1}$  reparamétrisés par une fonction  $\varphi$  de même régularité que  $\phi$  (voir [5]).

### 1.3 Applications aux échanges de 3 intervalles.

Un échange d'intervalles est une transformation bijective de l'intervalle  $[0, 1]$  affine par morceaux, et qui préserve les longueurs. Ces transformations classiques ne sont jamais mélangeantes ([9]). L'unique ergodicité et le mélange faible sont des résultats presque sûrs difficiles et connus depuis longtemps pour le premier grâce aux travaux de H. Masur et W. Veech ([29], [19]) mais démontré très récemment pour le second par A. Avila et G. Forni ([2]).

Le cas le plus simple après les échanges de deux intervalles, qui sont des translations sur le tore, est celui des échanges de trois intervalles. Pour ceux-ci, le mélange faible presque sûr est un résultat classique ([12]) qui provient d'une remarque simple : tout échange de trois intervalles est l'induit d'une translation irrationnelle sur un intervalle. Dans ce cas, la stricte ergodicité est également connue depuis longtemps (lorsque les discontinuités sont rationnellement indépendantes, voir [13]). En revanche la caractérisation des valeurs propres et la description du facteur Kronecker en fonction des paramètres reste un problème ouvert. L'existence de valeurs propres rationnelles dans certains cas particuliers est une conséquence de [28] et [27]. Des travaux récents de S. Ferenczi, C. Holton et L. Zamboni ([6]) fournissent des réponses partielles à ce problème, en donnant en particulier des exemples d'échanges de 3 intervalles non triviaux conjugués à une rotation irrationnelle du cercle. Ils montrent également que tout réel quadratique est une valeur propre d'un échange de trois intervalles non trivial.

Inversement n'importe quel induit d'une rotation irrationnelle sur un intervalle est aussi un échange de trois intervalles. C'est sous cette forme que nous construirons les échanges de trois intervalles. Pour  $\beta \in ]0, 1[$ , nous noterons  $T_{\alpha,\beta}$  la transformation induite par  $T$  sur  $[0, \beta[$ , définie par

$$T_{\alpha,\beta}(x) = T^{n(x)}(x) \quad \text{où } n(x) = \min(k > 0, T^k x \in [0, \beta[)$$

pour tout  $x \in [0, \beta[$ , la probabilité invariante étant la mesure de Lebesgue renormalisée qu'on note  $\lambda_\beta$ .

Les valeurs propres de  $T_{\alpha,\beta}$  sont encore déterminées par une équation de cohomologie (cf. [12], [10]) : notons  $e(T_{\alpha,\beta})$  le sous-groupe de  $\mathbb{T}$  des valeurs propres

de  $T_{\alpha,\beta}$ . Il est constitué des  $s$  de  $\mathbb{T}$  pour lesquels il existe une fonction mesurable  $f$  non presque partout nulle vérifiant

$$e^{2i\pi s} \mathbf{1}_{[0,\beta[} f = f \circ T.$$

Donc le relevé dans  $\mathbb{R}$  de  $e(T_{\alpha,\beta})$  est l'ensemble des réels  $s$  pour lesquels l'équation (3) avec  $t = -s\beta \pmod{1}$  admet une solution.

Nous obtenons à partir du théorème 1 des résultats pour les échanges de trois intervalles analogues à ceux pour les flots spéciaux :

**Théorème 5** On a les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout  $\alpha$  tel que  $\inf_{q \neq 0} q \|q\alpha\| = 0$ , il existe un ensemble non dénombrable dense de  $\beta$  pour lesquels  $T_{\alpha,\beta}$  admet une infinité de valeurs propres rationnellement indépendantes.
- (ii) Pour tout  $\alpha$  tel que  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|q\alpha\| = 0$ , il existe un ensemble non dénombrable dense de  $\beta$  tels que  $T_{\alpha,\beta}$  soit conjugué à une rotation irrationnelle du cercle.
- (iii) Pour tout  $\alpha$  tel que  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|q\alpha\| = 0$ , il existe un ensemble non dénombrable dense de  $\beta$  tels que  $T_{\alpha,\beta}$  soit conjugué à un odomètre.
- (iv) Toute rotation irrationnelle d'angle  $s$  du cercle tel que  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|qs\| = 0$  est conjuguée à un échange de 3 intervalles.
- (v) Tout odomètre est conjugué à un échange de 3 intervalles.

**Remarque :** Notons que (ii) est une généralisation du théorème 1 de [6].

## 1.4 Plan de l'article.

Ce travail est constitué de 3 parties et d'un appendice. La première partie regroupe l'introduction et un chapitre préliminaire (chapitre 2) qui présente la démarche et les outils de la démonstration du théorème 1. Nous y discutons aussi les représentations en tours d'intervalles de la translation irrationnelle liées à la fraction continue utiles pour les chapitres 3, 4 et 7.

La seconde partie regroupe les chapitres 3 et 4. Le chapitre 3 complète la preuve du théorème 1 en traitant les points les plus techniques. Le chapitre 4, qui s'appuie sur le précédent, est consacré au cas des fonctions en escalier générales et contient la preuve du théorème 2.

Les chapitres 5, 6, 7 et 8 forment la troisième partie : ils contiennent les applications aux valeurs propres des flots spéciaux et des échanges de trois intervalles. Le chapitre 5 est une approche générale du problème qui met en relation ces deux types de transformations grâce aux tours de Kakutani. Le chapitre 6 est consacré aux constructions avec une infinité de valeurs propres indépendantes (points (i) des théorèmes 3 et 5) et le chapitre 7 aux isomorphismes avec des translations : on y propose d'abord une construction de tours de Kakutani où l'on peut identifier le facteur Kronecker. Nous montrons ensuite les points (ii) et (iii) des théorèmes 3 et 5, ainsi que leurs réciproques (théorème 4, points (iv) et (v) du théorème 5). Le chapitre 8 est constitué de la preuve de la proposition 10, qui permet d'achever les preuves des théorèmes 3 et 4 par régularisation des fonctions en escalier.

Enfin on trouvera dans l'appendice la preuve de la proposition 1.

Les parties 2 et 3 peuvent être lues indépendamment l’une de l’autre : les objets indispensables au chapitre 7 (tours de la translation, approximations des fonctions de transfert) sont introduits dans le chapitre 2. Dans la partie 3, les chapitres 6 et 7 sont indépendants.

## 2 Préliminaires.

### 2.1 Des notations et définitions

Dans tout l’article, l’irrationnel  $\alpha$  est supposé donné sauf pour les constructions réciproques aux chapitres 6 et 7, et  $T$  désigne la translation par  $\alpha$  sur  $\mathbb{T}$ . Pour la preuve du théorème 1, dans ce chapitre et le suivant, le réel non entier  $s$  est aussi supposé fixé.

#### 2.1.1 Cocycles. Les quasi-cobords triviaux

Deux fonctions réelles mesurables  $\phi$  et  $\psi$  sur  $\mathbb{T}$  sont cohomologues (additivement) s’il existe une fonction réelle mesurable  $f$  telle que  $\phi - \psi = f - f \circ T$ . On dit que  $\phi$  est un cobord si elle est cohomologue à 0 et qu’elle est un quasi-cobord si elle est cohomologue à une constante. La fonction  $f$  correspondante, unique à une constante près, est appelée fonction de transfert.

On note, pour tout entier  $n > 0$ ,

$$\phi^{(n)} = \sum_{0 \leq j < n} \phi \circ T^j, \quad \phi^{(-n)} = -\phi^{(n)} \circ T^{-n}, \quad \text{et } \phi^{(0)} = 0.$$

On utilisera souvent les relations  $\phi - \phi \circ T^n = \phi^{(n)} - \phi^{(n)} \circ T$  quel que soit  $\phi$ , et  $\phi^{(n)} = f - f \circ T^n$  lorsque  $\phi = f - f \circ T$ .

Pour une fonction  $\varphi = \exp 2i\pi\phi$  de module 1 sur  $\mathbb{T}$ , on adopte les mêmes définitions et notations, en remplaçant l’addition par la multiplication, ou on parlera de cohomologie modulo 1 pour  $\phi$ . On a alors  $\varphi^{(n)} = \exp 2i\pi\phi^{(n)}$  pour tout entier  $n$ .

On pose  $\varphi_\beta = \exp 2i\pi s\phi_\beta$  pour tout  $\beta \in \mathbb{T}$  (ou  $\mathbb{R}$ ). On rappelle que  $\phi_\beta$  est définie par  $\phi_\beta = \mathbf{1}_{[0, \{\beta\}[} - \{\beta\}$ , avec aussi  $\phi_\beta(x) = \{x - \beta\} - \{x\}$ . En particulier  $\phi_\alpha$  est un cobord.

Pour tout entier  $n$ , on a la propriété “de cocycle”

$$\phi_{n\alpha+\beta} = \phi_{n\alpha} + \phi_\beta \circ T^{-n} \tag{4}$$

et, en notant  $\omega$  la fonction  $x \mapsto \{x\}$  de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{R}$ , on a aussi

$$\phi_{n\alpha} = \omega \circ T^{-n} - \omega = \omega_n - \omega_n \circ T$$

avec

$$\omega_n = -\omega^{(-n)}.$$

Donc  $\phi_{n\alpha}$  est un cobord avec une fonction de transfert  $\omega_n$  affine par morceaux. Si  $n \geq 0$ , alors  $\omega_n = \sum_{1 \leq j < n} \omega \circ T^{-j}$  admet  $n$  discontinuités aux points  $T^j 0$  pour  $1 \leq j \leq n$ , les sauts en chacun de ces points valant  $-1$  ; si  $n < 0$  les points de discontinuité sont les  $T^j 0$  pour  $n < j \leq 0$  avec des sauts égaux à  $+1$ , et dans les deux cas  $\omega_n$  est de pente  $n$  dans chaque intervalle où elle est continue.

D'après cela,  $\varphi_{n\alpha}$  est un cobord multiplicatif pour tout entier  $n$ , avec la fonction de transfert  $e^{2i\pi s\omega_n}$ . En multipliant cette fonction par les exponentielles  $e^{2i\pi mx}$ , on voit qu'elle est aussi cohomologue à toutes les valeurs propres  $e^{2i\pi m\alpha}$  de  $T$ . En notation additive, quels que soient les entiers  $m$  et  $n$ ,

$$s\phi_{n\alpha} = m\alpha + \omega_{n,m} - \omega_{n,m} \circ T \pmod{1},$$

avec

$$\omega_{n,m} = s\omega_n + m\omega.$$

Pour la suite, on observe que  $\omega_{n,m}$  est encore une fonction affine par morceaux de même points de discontinuité que  $\omega_n$ , avec des sauts de  $\mp s$  selon le signe de  $n$  et la pente  $ns + m$ , entre deux sauts.

### 2.1.2 Fraction continue et développements d'Ostrowski

Pour le développement en fraction continue, on identifie  $\alpha$  à un réel de  $]0, 1[$ . On notera  $\alpha_0 = \alpha$  et, pour  $n \geq 1$ ,

$$\alpha_n = \|q_n\alpha\|.$$

On rappelle les propriétés classiques utiles pour la suite (voir [14] par exemple). La suite  $(\alpha_n)$  est strictement décroissante. Pour les premiers termes,  $q_0 = 1$ ,  $p_0 = 0$ ,  $q_1 = a_1$ ,  $p_1 = 1$  et, pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= a_{n+1}q_n + q_{n-1}, & p_{n+1} &= a_{n+1}p_n + p_{n-1}, \\ p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (-1)^n, & \langle q_n \alpha \rangle &= q_n \alpha - p_n = (-1)^n \alpha_n, \\ \alpha_{n-1} &= a_{n+1} \alpha_n + \alpha_{n+1}, & q_n \alpha_{n-1} + q_{n-1} \alpha_n &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\|q\alpha\| \geq \alpha_{n-1} \quad \text{lorsque } 0 < |q| < q_n. \quad (5)$$

Dans le cas où la suite des quotients partiels est non bornée, on utilisera fréquemment les équivalences, le long d'une suite d'indices  $n$  tels que  $a_{n+1} \rightarrow +\infty$  :

$$q_n \alpha_n \sim \frac{1}{a_{n+1}} \quad \text{et} \quad \alpha_{n-1} \sim \frac{1}{q_n},$$

avec dans tous les cas  $\frac{1}{2} < q_n \alpha_{n-1} < 1$  et  $\frac{1}{2} \alpha_{n-1} < a_{n+1} \alpha_n < \alpha_{n-1}$ .

En particulier pour un développement  $\beta = \sum_{n \geq 0} b_n q_n \alpha \pmod{1}$ , la condition  $\sum_{n \geq 0} |b_n|/a_{n+1} < \infty$  (soit  $\beta \in H_1(\alpha)$ ) équivaut à  $\sum_{n \geq 0} |b_n| q_n \alpha_n < \infty$ . Pour un réel  $\beta$  non modulo 1, un tel développement d'Ostrowski symétrique s'écrit

$$\beta = k_1 \alpha - l_1 + \sum_{n \geq 1} b_n \langle q_n \alpha \rangle,$$

avec  $k_1, l_1$  et les  $b_n$  entiers, et on note pour tout  $n \geq 1$

$$\beta_n = k_n \alpha - l_n = k_1 \alpha - l_1 + \sum_{1 \leq j < n} b_j \langle q_j \alpha \rangle,$$

où  $k_n = k_1 + \sum_{1 \leq j < n} b_j q_j$  et de même pour  $l_n$ . On utilisera ces développements uniquement dans le cas où  $\beta \in H_\infty(\alpha)$ , c'est-à-dire  $b_n/a_{n+1} \rightarrow 0$ . On a alors clairement  $k_n = o(q_n)$  et  $\beta - \beta_n = o(\alpha_{n-1})$ , et plus précisément :

**Lemme 1** Avec les notations ci-dessus, soient  $n \geq 1$  et  $\varepsilon > 0$ . Si  $|b_j|/a_{j+1} \leq \varepsilon$  pour tout  $j \geq n$ , alors

$$|\beta - \beta_n| < 2\varepsilon\alpha_{n-1}.$$

En supposant de plus  $|k_n| < q_n$  et  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ , si  $\beta \in \mathbb{Z}$  alors  $k_n$  et tous les  $b_j$  pour  $j \geq n$  sont nuls.

Preuve : L'inégalité résulte de

$$\sum_{j \geq n} |b_j| \alpha_j \leq \varepsilon \sum_{j \geq n} a_{j+1} \alpha_j = \varepsilon \sum_{j \geq n} (\alpha_{j-1} - \alpha_{j+1}) = \varepsilon(\alpha_{n-1} + \alpha_n).$$

Maintenant, si  $|k_n| < q_n$ ,  $\varepsilon < \frac{1}{2}$  et  $\beta \in \mathbb{Z}$ , on a  $\|k_n \alpha\| = \|\beta_n - \beta\| < \alpha_{n-1}$  donc nécessairement  $k_n = 0$  d'après (5). On a alors aussi  $|k_{n+1}| = |b_n| q_n < q_{n+1}$  donc  $k_{n+1} = b_n = 0$  et, par une récurrence immédiate,  $b_j = 0$  pour tout  $j \geq n$ .  $\square$

Ce lemme montre l'unicité du développement  $\beta = k_n \alpha - l_n + \sum_{j \geq n} b_j q_n \alpha$  dès que  $|k_n| < q_n/2$  et  $|b_j| \leq a_{j+1}/4$  pour  $j \geq n$ . En particulier  $\beta \in \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$  si et seulement les  $b_j$  sont nuls sauf pour un nombre fini.

Ainsi tout réel  $\beta$  de  $H_\infty(\alpha)$  admet de bonnes approximations  $\beta_n = k_n \alpha \bmod 1$  avec  $k_n = o(q_n)$ . Réciproquement, on obtient  $\beta \in H_\infty(\alpha)$  sous une condition plus faible :

**Lemme 2** Soit  $\beta$  un réel. Si pour tout  $n \geq 1$  il existe un entier  $k_n = o(q_{n+1})$  tel que  $\|\beta - k_n \alpha\| = o(\alpha_{n-1})$ , alors  $\beta \in H_\infty(\alpha)$ .

Preuve : On utilise la proposition 1. Sous les conditions données  $\|q_n \beta\| \leq \|q_n k_n \alpha\| + q_n \|\beta - k_n \alpha\| \leq |k_n| \|q_n \alpha\| + o(q_n \alpha_{n-1}) = o(q_{n+1} \alpha_n) + o(q_n \alpha_{n-1})$ , et cette quantité tend vers 0.  $\square$

### 2.1.3 Tours de la translation

Soit  $B$  un borélien de  $\mathbb{T}$ ; on appelle tour de base  $B$  une suite  $(T^j B)_{0 \leq j < h}$  d'images successives de  $B$  deux-à-deux disjointes. La hauteur de la tour est  $h$  et les  $T^j B$  sont les étages de la tour. Par abus de langage on appellera aussi tour la réunion des étages.

Il est bien connu que le développement de  $\alpha$  en fraction continue définit par induction, à chaque ordre  $n \geq 1$ , une partition de  $\mathbb{T}$  en deux tours de la translation, formées d'intervalles. En fait, si  $B_n$  est un intervalle quelconque de longueur  $\alpha_{n-1}$ , les  $T^j B_n$  pour  $0 \leq j < q_n$  sont deux-à-deux disjoints d'après (5) et forment donc une première tour de hauteur  $q_n$  et de mesure  $q_n \alpha_{n-1} > \frac{1}{2}$ , qu'on appellera tour majeure d'ordre  $n$ . Pour la même raison, pour tout  $x \in \mathbb{T}$ , la suite  $(T^j x)_{0 \leq j < q_n}$  ne contient aucun point entre  $T^j x$  et  $T^{j+q_n-q_{n-1}} x = T^j x + (-1)^n(\alpha_n + \alpha_{n-1})$  lorsque  $0 \leq j < q_{n-1}$ ; si par exemple  $n$  est pair et  $B_n = [x_n, x_n + \alpha_{n-1}[$ , on voit ainsi que le complémentaire de la tour majeure est la réunion des intervalles  $T^j [x_n + \alpha_{n-1}, x_n + \alpha_{n-1} + \alpha_n[$  pour  $0 \leq j < q_{n-1}$ , qui forment une tour mineure de hauteur  $q_{n-1}$  et de mesure  $q_{n-1} \alpha_n < \frac{1}{2}$ .

Enfin, nous introduisons deux notations qui serviront surtout à majorer les variations de fonctions sur les étages des tours :

– Si  $f$  est une fonction mesurable sur  $\mathbb{T}$  et  $B$  un borélien de  $\mathbb{T}$  de mesure non nulle, on appelle variation moyenne de  $f$  sur  $B$  la quantité

$$V_B(f) = \frac{1}{\lambda(B)^2} \iint_{B^2} |f(x) - f(y)| dx dy .$$

– Nous utilisons les notations habituelles  $o$  et  $\mathcal{O}$ . On notera

$$g(x) = \mathcal{O}_1(f(x))$$

lorsque  $|g(x)| \leq |f(x)|$  pour tout  $x$  et de même pour des suites.

## 2.2 Outils et schéma de la preuve du théorème 1.

Nous présentons ici un plan détaillé de la démonstration du théorème 1, avec les principaux arguments. L'irrationnel  $\alpha$  et le réel non entier  $s$  étant fixés, nous discutons les conditions sur un couple  $(\beta, t)$  de réels modulo 1 pour que l'équation (3),  $\varphi_\beta = e^{2i\pi t} f/f \circ T$ , admette une solution.

### 2.2.1 Principe – approximations de $\beta$ et $t$ .

La démonstration sera basée sur l'étude de la convergence des solutions approchées fournies par les fonctions de transfert “triviales” obtenues pour par les approximations de  $\beta$  et  $t$  dans  $\mathbb{Z}\alpha$ , selon le paragraphe 2.1.1.

Pour montrer que les conditions du théorème suffisent, c'est la méthode de K. Merrill, qui montre que  $\varphi_\beta$  est un quasi-cobord sous une hypothèse très voisine mais plus forte : dans [20], on trouve la condition  $\sum \|b_n s\| < \infty$  au lieu de  $\sum \|b_n s\|^2 < \infty$ . Nous aurons surtout à préciser exactement les conditions de la convergence.

Dans l'autre sens, on montrera que les solutions approchées doivent converger vers  $f$ , à un choix de constantes près, et on est ramené au problème de caractériser cette convergence. Mais il sera plus simple de savoir d'abord que  $\beta$  et  $t$  sont bien approchés par  $\mathbb{Z}\alpha$ , c'est-à-dire  $\beta, t \in H_\infty(\alpha)$ .

Le fait que  $\beta$  doit appartenir à  $H_\infty(\alpha)$  est connu depuis W. Veech [28] et M. Stewart [27] qui montrent aussi que ses coefficients  $b_n$  doivent satisfaire  $\|b_n s\| \rightarrow 0$  – et ce sont les seules conditions nécessaires déjà connues. Ils utilisent une méthode différente, basée sur les temps de rigidité de  $T$  : lorsque  $\varphi = e^{2i\pi t} f/f \circ T$ , on a  $\varphi^{(n)} = e^{2i\pi n t} f/f \circ T^n$  pour tout  $n$  et  $e^{-2i\pi n t} \varphi^{(n)}$  doit tendre vers 1 en mesure lorsque  $n$  tend vers l'infini avec  $\|n\alpha\| \rightarrow 0$ , donc on obtient des conditions sur la répartition des  $\varphi^{(n)}$  (c'est aussi l'utilisation de la réciproque qui conduit aux critères suffisants établis dans [28] et [27]).

Nous avons besoin de cette propriété uniquement lorsque  $n$  est un dénominateur de la fraction continue de  $\alpha$ , à savoir : si  $\varphi_\beta$  est cohomologue à  $e^{2i\pi t}$ , on doit avoir

$$e^{-2i\pi q_n t} \int_{\mathbb{T}} \varphi_\beta^{(q_n)} d\lambda \rightarrow 1, \quad (6)$$

ou de façon équivalente  $s\phi_\beta^{(q_n)} - q_n t \rightarrow 0 \pmod{1}$  en mesure.

On a  $\phi_\beta^{(q_n)}(x) = \sum_{0 \leq j < q_n} \mathbf{1}_{[0, \{\beta\}[ ]}(x) - q_n \beta$  : c'est l'écart à la moyenne du nombre de passages de  $(x + j\alpha)_{0 \leq j < q_n}$  dans  $[0, \{\beta\}[$  et il est connu que, pour un dénominateur  $q_n$ , on obtient au plus 3 valeurs. Ces valeurs sont de la forme  $j - q_n \beta$  avec des entiers  $j$  consécutifs car les sauts de  $\phi_\beta^{(q_n)}$  valent  $\pm 1$ . Lorsque  $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ , la condition (6) implique qu'il existe  $j_n$  tel que  $\phi_\beta^{(q_n)} - (j_n - q_n \beta)$  tende vers 0 en mesure ; comme  $\int_{\mathbb{T}} \phi_\beta^{(q_n)} d\lambda = 0$ , on doit avoir  $j_n - q_n \beta \rightarrow 0$  d'où  $\|q_n \beta\| \rightarrow 0$  et de plus  $s\phi_\beta^{(q_n)} \rightarrow 0$  en mesure, donc aussi  $\|q_n t\| \rightarrow 0$ .



Nous discuterons plus précisément la répartition de  $\phi_\beta^{(q_n)}$  et les cas restants au § 2.3.3. Pour la suite de ce paragraphe, on suppose que  $\beta$  et  $t$  appartiennent à  $H_\infty(\alpha)$ . On note les développements d'Ostrowski symétriques de  $\beta$  et  $t$  dans  $\mathbb{T}$  et leurs approximations dans  $\mathbb{Z}\alpha$  comme au § 2.1.2 :

$$\beta = \sum_{j \geq 0} b_j q_j \alpha, \quad t = \sum_{j=0}^{\infty} b'_j q_j \alpha, \quad (7)$$

et

$$\beta_n = k_n \alpha = \sum_{0 \leq j < n} b_j q_j \alpha, \quad t_n = k'_n \alpha = \sum_{j=0}^{n-1} b'_j q_j \alpha$$

pour  $n \geq 1$ , les  $b_n$  et les  $b'_n$  étant des entiers vérifiant  $b_n/a_{n+1} \rightarrow 0$ ,  $b'_n/a_{n+1} \rightarrow 0$ . On rappelle les estimations

$$\begin{cases} k_n = o(q_n), & \beta - \beta_n = o(\alpha_{n-1}), \\ k'_n = o(q_n), & \text{et } t - t_n = o(\alpha_{n-1}). \end{cases}$$

### 2.2.2 Description de la suite des fonctions de transfert.

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $s\phi_{\beta_n} = \phi_{k_n \alpha}$  est cohomologue à  $t_n = k'_n \alpha$  modulo 1. On décrit ici la suite des fonctions de transfert, définies à une constante près, en vue d'étudier leur convergence. On pose

$$\tilde{f}_n = \omega_{k_n, k'_n} + c_n, \quad f_n = \exp 2i\pi \tilde{f}_n$$

où  $\omega_{k_n, k'_n}$  est la fonction affine par morceaux définie au § 2.1.1 et  $c_n$  est une constante qu'on choisira ensuite selon les besoins ; alors

$$s\phi_{\beta_n} = t_n + \tilde{f}_n - \tilde{f}_n \circ T \pmod{1}. \quad (8)$$

On pose aussi

$$\tilde{\theta}_n = \tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n \quad \text{et} \quad \theta_n = f_{n+1}/f_n = \exp 2i\pi \tilde{\theta}_n.$$

Comme  $t_{n+1} - t_n = b'_n q_n \alpha$  et  $\phi_{\beta_{n+1}} - \phi_{\beta_n} = \phi_{b_n q_n \alpha} \circ T^{-k_n}$  d'après (4),

$$s\phi_{b_n q_n \alpha} \circ T^{-k_n} = b'_n q_n \alpha + \tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}_n \circ T \pmod{1} \quad (9)$$

et  $\tilde{\theta}_n$  est égal à  $\omega_{b_n q_n, b'_n q_n} \circ T^{-k_n}$  à une constante près.

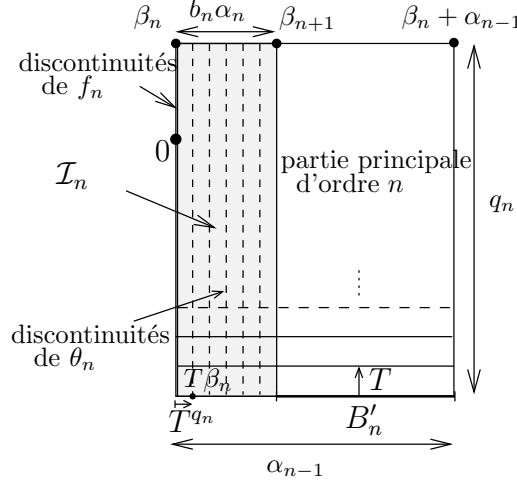
On suppose  $n$  assez grand pour que  $b_n$  et  $b'_n$  soient petits devant  $a_{n+1}$  ; alors  $\|b_n q_n \alpha\| = |b_n| \alpha_n$  est petit devant  $\alpha_{n-1}$ . Pour décrire le comportement de  $\tilde{f}_n$  et  $\theta_n$ , on doit distinguer plusieurs cas, selon les signes de  $k_n$  et  $b_n$ , et selon la parité de  $n$ . On suppose d'abord ici  $k_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$  et  $n$  pair.

Alors les discontinuités de  $\tilde{f}_n$  et  $\theta_n$  sont situées aux points  $(T^j 0)_{1 \leq j \leq k_n}$  et  $(T^j \beta_n)_{1 \leq j \leq b_n q_n}$  respectivement ; ces points se représentent bien dans la tour majeure

$$\mathcal{T}_n = (T^{-j}[\beta_n, \beta_n + \alpha_{n-1}])_{0 \leq j < q_n},$$

de base  $B_n = T^{-q_n+1}[\beta_n, \beta_n + \alpha_{n-1}[$ , qu'on appellera simplement dans la suite la tour majeure d'ordre  $n$ . Plus précisément, les discontinuités de  $\tilde{f}_n$  se trouvent

Fig. 1 – Tour majeure d'ordre  $n$ , partie principale.



à une extrémité des derniers étages et celles de  $\tilde{\theta}_n$ , qu'on peut aussi écrire  $T^{-j}(\beta_n + k\alpha_n)$  avec  $1 \leq k < b_n$  et  $0 \leq j < q_n$ , se trouvent dans la sous-tour

$$\mathcal{I}_n = (T^{-j}[\beta_n, \beta_{n+1}])_{0 \leq j < q_n} \quad (10)$$

de base  $I_n = T^{-q_n+1}[\beta_n, \beta_{n+1}]$  et de mesure  $b_n q_n \alpha_n$  convergeant vers 0.

La sous-tour complémentaire  $\mathcal{T}'_n = (T^j B'_n)_{0 \leq j < q_n}$  de base  $B'_n = B_n \setminus I_n$  sera appelée la tour principale d'ordre  $n$ . On a représenté figure 1 la tour majeure avec les deux sous-tours et les points de discontinuité de  $\tilde{f}_n$  et  $\tilde{\theta}_n$ .

On obtient les propriétés suivantes :

- (i) Sur chaque étage  $T^j B_n$  de  $\mathcal{T}_n$  ( $0 \leq j < q_n$ ), la fonction  $\tilde{f}_n$  est affine de pente  $k_n s + k'_n$ , donc sa variation y est petite :

$$V_{T^j B_n}(\tilde{f}_n) \leq |k_n s + k'_n| \alpha_{n-1} < |k_n s + k'_n| / q_n \rightarrow 0. \quad (11)$$

- (ii) Sur chaque étage  $T^j B'_n$  de  $\mathcal{T}'_n$  ( $0 \leq j < q_n$ ), la fonction  $\tilde{\theta}_n$  est affine de pente  $(b_n s + b'_n) q_n$ , et sa variation est de l'ordre de  $|b_n s + b'_n|$  (car  $\frac{1}{2} < q_n \alpha_{n-1} < 1$ ).

- (iii) Hors de  $[\beta_n, \beta_{n+1}[$ , on a  $\phi_{b_n q_n \alpha} \circ T^{-k_n} = -\{b_n q_n \alpha\}$  donc  $\tilde{\theta}_n \circ T - \tilde{\theta}_n = (b_n s + b'_n) q_n \alpha \pmod{1}$  d'après (9). En itérant, pour tout point  $x \in B_n$ ,

$$\|\tilde{\theta}_n \circ T^j(x) - \tilde{\theta}_n(x)\| \leq |b_n s + b'_n| q_n \alpha_n \quad \text{pour } 0 \leq j < q_n. \quad (12)$$

Comme  $q_n \alpha_n$  est de l'ordre de  $1/a_{n+1}$ , cette dernière inégalité signifie que  $\tilde{\theta}_n$  est presque invariante par  $T$  sur  $\mathcal{T}_n$ .

Pour les autres cas ( $k_n < 0$ ,  $b_n < 0$  ou  $n$  impair), on précisera au § 2.3.2 les modifications à apporter pour obtenir les mêmes propriétés.

### 2.2.3 Pourquoi les conditions du théorème 1 suffisent-elles ?

On suppose que  $\beta$  et  $t$  satisfont les conditions du théorème 1, c'est-à-dire  $\sum_n |b_n| q_n \alpha_n < \infty$ , les coefficients du développement de  $t$  vérifient  $b'_n = -[b_n s]$

pour  $n$  assez grand et

$$\sum_{n \geq 0} (b_n s + b'_n)^2 < \infty.$$

Pour montrer que l'équation (3) admet une solution, il suffit de montrer que la suite des fonctions  $f_n = \exp 2i\pi \tilde{f}_n$  admet une valeur d'adhérence faible  $f$  non nulle dans  $L^2(\mathbb{T})$  (par exemple). En effet, comme  $\phi_{\beta_n}$  converge ponctuellement vers  $\phi_\beta$ , sauf peut-être en  $\beta$ , et que  $t_n$  converge vers  $t$ , on vérifie immédiatement d'après (8) qu'alors  $f$  satisfait l'égalité  $\varphi_\beta f \circ T = e^{2i\pi t} f$ , et l'ergodicité de  $T$  assure que  $f$  est de module constant, non nul puisque  $f$  est supposée non nulle.

Avec l'hypothèse plus forte de K. Merrill ([20]), avec toujours  $\sum_n |b_n| q_n \alpha_n < \infty$  mais  $\sum_n |b_n s + b'_n| < \infty$ , on obtient la convergence de la série  $\sum \|1 - \theta_n\|_1$ , donc la convergence de  $(f_n)$  dans  $L^1(\mathbb{T})$ , moyennant un choix des constantes  $c_n$ . On peut se restreindre à la sous-suite des indices pour lesquels  $\tilde{\theta}_n$  est non nulle, c'est-à-dire  $b_n \neq 0$  ou  $b'_n \neq 0$ . Avec la première hypothèse, la somme des mesures des tours mineures correspondantes est finie et on a aussi  $\sum_n \lambda(\mathcal{I}_n) < \infty$ , donc il suffit d'estimer l'intégrale de  $|1 - \theta_n|$  sur la tour principale. En choisissant les constantes  $c_n$  de façon que  $\tilde{\theta}_n$  s'annule en un point de  $B'_n$ , on a  $|\tilde{\theta}_n| \leq |b_n s + b'_n|$  sur  $B'_n$  d'après la propriété (ii) et  $\|\tilde{\theta}_n\| \leq |b_n s + b'_n|(1 + q_n \alpha_n)$  d'après (12) sur  $\mathcal{T}'_n$ . on obtient grâce à la seconde condition la convergence annoncée.

Dans notre cas, il faut être plus précis et on montrera seulement qu'il existe une fonction  $g \in L^2(\mathbb{T})$  telle que  $\lim |\int_{\mathbb{T}} g f_n d\lambda| > 0$ , pour prouver que  $(f_n)$  admet une valeur d'adhérence faible non nulle. On peut toujours négliger l'intégrale sur le complémentaire de la tour principale, qui reste de masse sommable. Sur la tour principale, on a une propriété d'indépendance asymptotique de  $f_n$  et  $\theta_n$ , du fait que  $f_n$  est pratiquement constante sur les étages et que  $\theta_n$  est presque invariante par  $T$ . Plus précisément, on montrera que si  $g$  est une fonction constante sur les étages de  $\mathcal{T}_n$  l'intégrale de  $f_{n+1}$  est proche du produit des intégrales de  $f_n$  et  $\theta_n$ . Il s'ensuit que la condition  $\lim |\int f_n d\lambda| > 0$  est vérifiée dès que le produit  $\prod \frac{1}{\lambda(B'_n)} |\int_{B'_n} \theta_n d\lambda|$  est non nul. Comme d'après (12), l'écart des valeurs de  $\theta_n$  entre les étages de la tour d'ordre  $n$  est encore sommable et il suffit donc de montrer la convergence de la série  $1 - \frac{1}{\lambda(B'_n)} |\int_{B'_n} \theta_n d\lambda|$ . Le calcul sur  $B'_n$  est parfaitement explicite, et la valeur trouvée est bien de l'ordre de  $(b_n s + b'_n)^2$  qui est supposée sommable.

#### 2.2.4 Pourquoi ces conditions sont-elles nécessaires ?

Il s'agit maintenant de comprendre pourquoi les conditions sont également nécessaires. On suppose donc l'existence d'une solution à l'équation (3), et on note  $\varphi_\beta = \exp 2i\pi s \phi_\beta$ . On a déjà vu au début du chapitre que nécessairement  $\beta$  et  $t$  se décomposent sous la forme (7), et on peut donc reprendre les notations et hypothèses du paragraphe 2.2.2.

Pour tout  $n$ , l'équation de cohomologie pour  $f$  et pour  $f_n$  donne en dehors de l'intervalle  $[\beta_n, \beta[$  l'égalité

$$(\tilde{f}_n - \tilde{f}) \circ T = (\tilde{f}_n - \tilde{f}) + (t_n - t) - s(\beta - \beta_n) \mod 1.$$

De façon analogue au paragraphe 2.2.2, on peut donc affirmer que :

- En dehors de l'ensemble  $\cup_0^{q_n-1} T^{-j}[\beta_n, \beta[$ , qui est de mesure petite (car  $(\beta_n - \beta)$  est négligeable devant  $\alpha_{n-1}$ ), si  $f_n$  est proche de  $f$  sur la base de

- la tour majeure d'ordre  $n$ , alors elle approche  $f$  sur n'importe quel autre étage à  $2\pi q_n(\|t - t_n\| + |s|\|\beta - \beta_n\|)$  près qui reste négligeable.
- $(\tilde{f} - \tilde{f}_n)$  est pratiquement constante sur les étages de la tour majeure d'ordre  $n$  représentée figure 1.

Ces propriétés permettent de montrer que  $f$  est la limite forte  $L^2$  de la suite des fonctions  $(f_n)$  ( voir proposition 2).

Il reste enfin à estimer le comportement de la suite  $(\theta_n)$ . Comme la suite  $(f_n)$  converge dans  $L^2$ , il est nécessaire que  $\|1 - \theta_n\|_2$  soit petite. Par suite, comme sa pente est constante sur les étages de la tour principale, et que sa valeur moyenne est à peu près la même sur chaque étage (par (12)), on en déduit que sa variation totale sur un étage doit être petite : ceci signifie que  $(sb_n + b'_n)q_n\alpha_{n-1} \rightarrow 0$ , et on retrouve la seconde condition obtenue par Veech et Stewart,  $|sb_n + b'_n| = \|sb_n\| \rightarrow 0$  ([28], [27]).

Reprenons maintenant la figure 1 : les discontinuités de  $\theta_n$  sont régulièrement réparties dans  $\mathcal{I}_n$ , et les sauts y sont de taille constante  $-s$ . Pour que le produit des  $\theta_n$  converge, il est nécessaire que les sauts ne se propagent pas : autrement dit il faut que  $\lambda(\lim \mathcal{I}_n) = 0$ . Comme les ensembles  $\mathcal{I}_n$  sont à peu près indépendants, on obtient comme condition nécessaire la convergence de la série  $(b_n q_n \alpha_n)$ .

Enfin, la dernière condition provient comme précédemment de l'“indépendance” entre  $f_n$  et  $\theta_n$ , qui permet d'affirmer que, comme  $\lim |\int_{\mathbb{T}} f_n d\lambda| > 0$ , et que  $f_{n+1} = f_n \theta_n$ , on a encore  $\prod |\int_{\mathbb{T}} \theta_n d\lambda| > 0$ . On obtient que la série  $(1 - |\int_{\mathbb{T}} \theta_n d\lambda|)$  converge, d'où la dernière condition nécessaire  $\sum |sb_n + b'_n|^2 < \infty$ .

## 2.3 Les tours de la rotation

Nous précisons dans ce paragraphe la construction des tours qui interviennent tout au long de notre travail. Les choix des tours représentées plus loin varient selon les valeurs de  $n$  et de la suite  $(k_n)$  : il ne s'agit que d'unifier les discussions lors de la preuve du théorème 1. Par confort, le lecteur pourra se restreindre à l'une des représentations données ci-après (on pourra par exemple supposer  $n$  pair,  $b_n$  et  $k_n$  positifs).

### 2.3.1 Représentation sur $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$

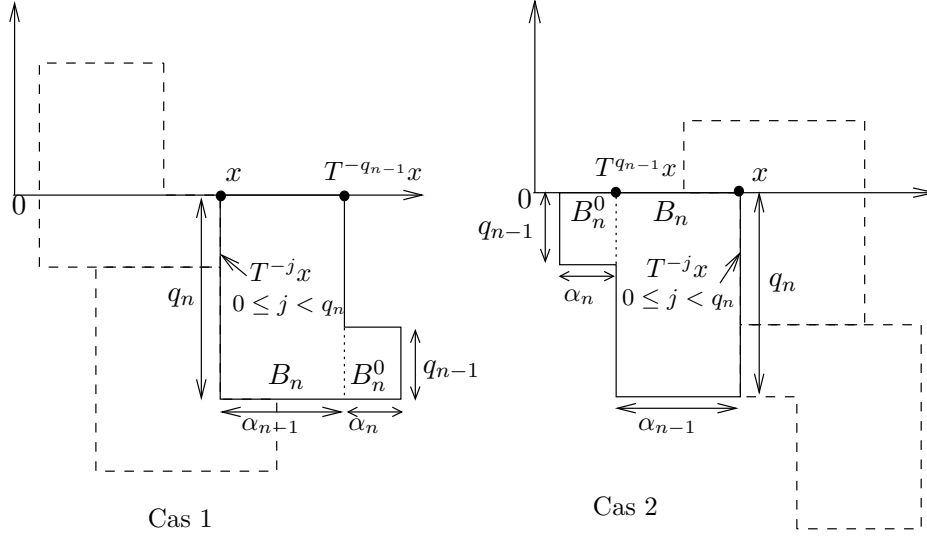
Nous rappelons brièvement les éléments nécessaires à la suite, pour une description plus détaillée, nous référons à [7]. On définit sur  $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$  la relation d'équivalence  $(Tx, n) \sim (x, n+1)$ ; alors  $\mathbb{T}$  est isomorphe à l'espace quotient  $\mathbb{T} \times \mathbb{Z} / \sim$ . Ceci revient à identifier la rotation de  $\alpha$  sur  $\mathbb{T}$  avec, ou bien la translation verticale de  $(0, 1)$ , ou bien la translation horizontale de  $(\alpha, 0)$  dans  $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ . On choisit maintenant des domaines fondamentaux liés à la fraction continue de  $\alpha$  de la façon suivante : pour tout  $n$  et pour tout  $x \in \mathbb{T}$ , la partition déterminée par les points  $(T^{-j}x)_{0 \leq j \leq q_n}$  se décompose en deux tours d'intervalles : on lui associera l'un ou l'autre des domaines fondamentaux représentés pour  $n$  pair sur la figure 2. Ils peuvent s'écrire, aux translations par  $(\alpha, -1)$  près, sous la forme :

$$[x, T^{-q_{n-1}}x] \times \{-q_n + 1, \dots, 0\} \cup [T^{-q_{n-1}}x, T^{-q_{n-1}+q_n}x] \times \{-q_n + 1, \dots, -q_n + q_{n-1}\} \quad (\text{cas 1}),$$

$$[T^{q_{n-1}}x, x] \times \{-q_n + 1, \dots, 0\} \cup [T^{-q_n+q_{n-1}}x, T^{q_{n-1}}x] \times \{-q_{n-1} + 1, \dots, 0\} \quad (\text{cas 2}).$$

Remarquons que le cas 2 s'obtient à partir du cas 1 en remplaçant  $T$  par  $T^{-1}$ . Nous adopterons pour la suite les terminologies suivantes :

Fig. 2 – Domaines fondamentaux d'ordre  $n$ .



- La tour majeure associée au domaine fondamental d'ordre  $n$  : c'est la tour de hauteur  $q_n$  et de base  $B_n$  égale à  $T^{-q_{n+1}}[0, T^{-q_{n-1}}0[$  dans le cas 1. Dans le cas 2, nous appellerons encore base l'intervalle  $B_n$  défini par  $]T^{q_{n-1}}0, 0[$  (qui est bien la base de la tour majeure pour la transformation  $T^{-1}$ ).
- La tour mineure associée au domaine fondamental d'ordre  $n$  est la tour de hauteur  $q_{n-1}$  et de base  $B_n^0$  égale à  $T^{-q_{n+1}}[T^{-q_{n-1}}0, T^{-q_{n-1}+q_n}0[$  dans le cas 1 et  $]T^{q_{n-1}-q_n}0, T^{q_{n-1}}0[$  dans le cas 2 (selon les mêmes conventions que ci-dessus).

On notera que les bases des tours mineure et majeure sont deux intervalles admettant une extrémité commune.

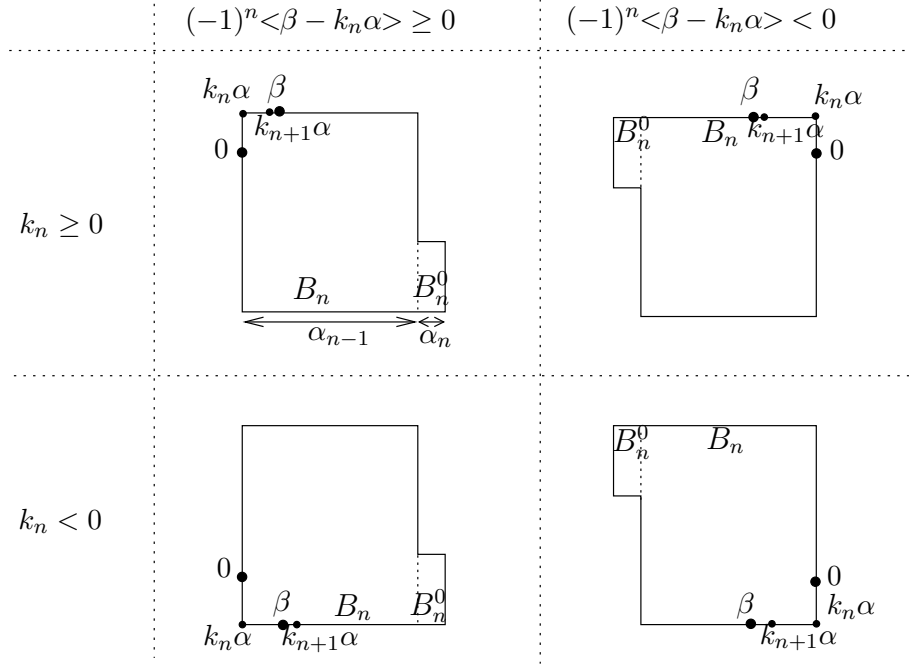
### 2.3.2 Une suite de domaines fondamentaux privilégiée.

Soit  $\beta \in \mathbb{T}$ . On suppose que  $\|\beta q_n\| \rightarrow 0$  et on reprend les notations (7) pour  $\beta$ . On choisit une suite de domaines fondamentaux qu'on note  $(\mathcal{D}_n(\beta))$  et qui vérifie les conditions suivantes :

- $\mathcal{D}_n(\beta)$  est un des domaines fondamentaux associé à la partition déterminée par les points  $(T^j 0)_{k_n \leq j < q_n + k_n}$  si  $k_n < 0$  et  $(T^j 0)_{k_n - q_n < j \leq k_n}$  sinon.
- $\mathcal{D}_n(\beta)$  est représenté selon le cas 1 de la figure 2 si  $\langle \alpha q_n \rangle < \beta - k_n \alpha \rangle \geq 0$  et selon le cas 2 sinon.

Nous obtenons pour  $\mathcal{D}_n(\beta)$  l'un des cas de la figure 3. On remarquera aisément que la suite des partitions associée à  $(\mathcal{D}_n(\beta))$  se raffine, et bien sur qu'elle engendre la tribu borélienne. Enfin, pour tout  $n$  suffisamment grand (de sorte que  $|b_n| < a_{n+1}/2$  par exemple), lorsque  $k_n \neq k_{n+1}$ ,  $\|k_n \alpha - k_{n+1} \alpha\|$  est inférieur à  $\alpha_{n-1}$ , et  $\langle \beta - k_n \alpha \rangle$  et  $\langle k_{n+1} \alpha - k_n \alpha \rangle$  sont de même signe. On en déduit que les points  $k_n \alpha$ ,  $k_{n+1} \alpha$  et  $\beta$  sont toujours sur le même étage, soit le premier soit le dernier, de la tour majeure d'ordre  $n$ . Nous retrouverons ces domaines fondamentaux dans les preuves des théorèmes 1 et 2.

Fig. 3 – Représentation de  $\mathcal{D}_n(\beta)$  (cas  $n$  pair).



### 2.3.3 $\|\beta q_n\|$ dans un domaine fondamental d'ordre $n$ .

Soit  $\beta$  dans  $\mathbb{T}$ . Pour tout  $n$ , ce point admet un unique représentant (encore appelé  $\beta$ ) dans le domaine fondamental  $\mathcal{D}_n(0)$ . Ses coordonnées  $(x_n, j_n)$  dans  $\mathcal{D}_n(0)$  satisfont  $\beta = j_n \alpha + (-1)^n x_n$  (cf figure 4). Notons également que

$$\beta q_n = j_n \alpha q_n + (-1)^n x_n q_n = (-1)^n (j_n \alpha_n + q_n x_n).$$

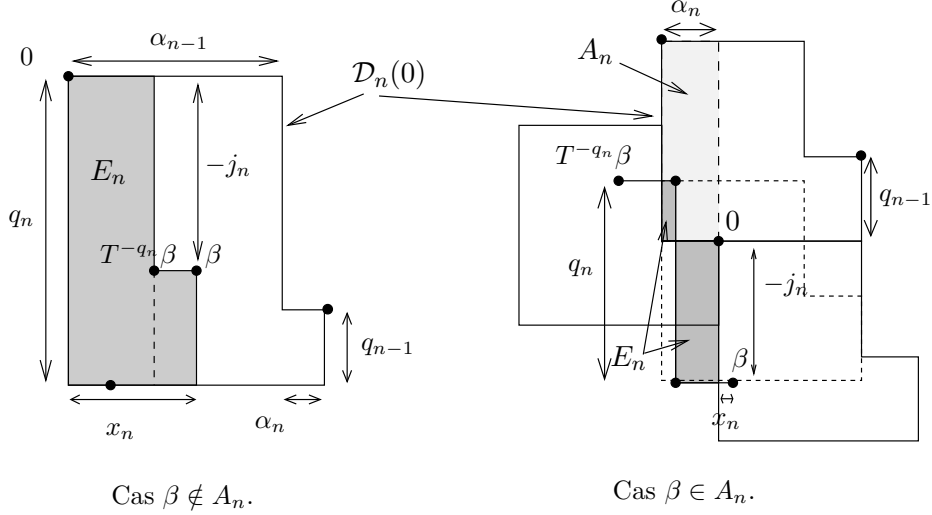
On s'intéresse maintenant à la distribution de  $\phi_\beta^{(q_n)}$  dans  $\mathbb{T}$  :  $\phi_\beta^{(q_n)}$  possède  $2q_n$  discontinuités  $(T^{-j}0)_{0 \leq j < q_n}$  et  $(T^{-j}\beta)_{0 \leq j < q_n}$ , qui se représentent facilement dans  $\mathcal{D}_n(0)$ .

Comme les étages de  $\mathcal{D}_n(0)$  sont des intervalles,  $\phi_\beta^{(q_n)}$  est constante sur les segments des étages de  $\mathcal{D}_n(0)$  sans discontinuité, et constante sur les translates de ces segments dès qu'ils ne contiennent pas  $[T^{-q_n}\beta, \beta[$  ni  $[T^{-q_n}0, 0[$  (car  $\phi_\beta^{(q_n)} \circ T = \phi_\beta^{(q_n)} + \phi_\beta \circ T^{q_n} - \phi_\beta$ ). En remarquant enfin que les sauts de  $\phi_\beta$  sont constants et valent  $\pm 1$ , on constate que  $\phi_\beta^{(q_n)}$  ne prend que 2 ou 3 valeurs qui se répartissent selon les domaines représentés sur la figure 4 (cas  $n$  pair). Soit  $E_n = \{\phi_\beta^{(q_n)} \neq \phi_\beta^{(q_n)}(\beta)\}$  (l'ensemble hachuré en gris sur la figure 4). La condition (6) montre que les seules valeurs d'adhérence possibles de  $\lambda(E_n)$  sont 0 ou 1.

Posons  $A_n$  l'ensemble de  $\mathcal{D}_n(0)$  des  $\beta$  tels que  $x_n \leq 0$ , alors  $\|\beta q_n\|$  et  $\lambda(E_n)$  sont liés par les remarques suivantes :

Lorsque  $\beta \notin A_n$ ,  $\phi_\beta^{(q_n)}$  n'a que 2 valeurs et  $\lambda(E_n) = \alpha_n j_n + x_n q_n = (-1)^n \beta q_n \bmod 1$

Fig. 4 – Répartition de  $\phi_\beta^{(q_n)}$  dans  $\mathcal{D}_n(0)$ .



ce qui donne

$$\|\beta q_n\| = \min(\lambda(E_n), 1 - \lambda(E_n)).$$

Lorsque  $\beta \in A_n$ , on a  $\lambda(E_n) = -x_n(q_n - j_n) + (\alpha_n + x_n)j_n$ . Alors on voit aisément que  $|(-1)^n \beta q_n| = |x_n(q_n - j_n) + (\alpha_n + x_n)j_n| \leq \lambda(E_n)$ . D'autre part, à l'aide de la représentation géométrique des 2 quantités, on vérifie facilement que  $\lambda(E_n) - |\langle \beta q_n \rangle| = 2 \min(-x_n(q_n - j_n), j_n(\alpha_n + x_n)) \leq 2(\alpha_n q_n - \lambda(E_n)) \leq 2(1 - \lambda(E_n))$ . On obtient donc

$$3\lambda(E_n) - 2 \leq |\{\beta q_n\}| \leq \lambda(E_n).$$

Par conséquent, comme  $(\min(\lambda(E_n), 1 - \lambda(E_n)))$  converge vers 0, on en déduit aussi que  $(\|\beta q_n\|)$  converge vers 0.

## 2.4 Quelques relations utiles

Nous aurons besoin, pour la preuve du théorème 1, d'exprimer la fonction de transfert solution de l'équation (3) comme limite forte dans  $L^2$  d'une suite de fonctions de transfert bien approchées par leurs projections sur des suites de tours associées à la rotation. Ce paragraphe a pour objectif d'établir des conditions suffisantes sur une suite de fonctions de transfert pour qu'elle admette une limite forte  $L^2$ . Les conditions obtenues ne sont pas spécifiques aux rotations irrationnelles, et on pourra remarquer que tous les résultats énoncés ici sont valables pour n'importe quelle transformation  $T$  de  $\mathbb{T}$ , bijective, bimesurable et préservant  $\lambda$ .

On suppose dans les lemmes qui suivent que  $\varphi$  est une fonction de module 1.

S'il existe  $\theta$  de module 1 et  $\delta$  solutions de l'équation  $\frac{\theta \circ T}{\theta} = e^{i\delta} \varphi$ , alors pour tout ensemble mesurable  $B$  on peut écrire

$$\int_{T^j B} \theta d\lambda = \int_B \theta d\lambda + \mathcal{O}_1(\delta j \lambda(B)) + \mathcal{O}_1\left(2\lambda(\{\varphi^{(j)} \neq 1\} \cap B)\right). \quad (13)$$

**Lemme 3** Supposons  $\theta$  et  $\delta$  solutions de l'équation précédente. Soit  $(T^j B)_{0 \leq j < h}$  une tour telle que  $\varphi = 1$  sur  $\mathcal{T} = \cup_{0 \leq j < h} T^j B$ . Pour toute fonction  $g$  de module inférieur à 1, constante sur chacun des étages de la tour et pour toute fonction  $f$  de module 1, on a

$$\int_{\mathcal{T}} g f \theta d\lambda = \frac{1}{\lambda(B)} \int_{\mathcal{T}} g f d\lambda \int_B \theta d\lambda + \lambda(\mathcal{T}) \mathcal{O}_1 \left( \frac{1}{h} \sum_{0 \leq j < h} V_{T^j B}(f) + \frac{\delta}{\lambda(B)} \right). \quad (14)$$

Preuve : On commence par décomposer le terme de gauche sur les étages :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}} g f \theta d\lambda &= \sum_{0 \leq j < h} \int_{T^j B} g f \theta d\lambda \\ &= \sum_{0 \leq j < h} \int_{T^j B} g \theta d\lambda \frac{1}{\lambda(B)} \int_{T^j B} f d\lambda + \sum_{0 \leq j < h} \int_{T^j B} g \theta \left( f - \frac{1}{\lambda(B)} \int_{T^j B} f d\lambda \right) d\lambda. \end{aligned}$$

Pour tout  $0 \leq j < h$ , comme  $g$  est constante sur  $T^j B$  et que  $\varphi^{(j)} = 1$  sur  $B$ , on obtient en utilisant (13) que :

$$\begin{aligned} \int_{T^j B} g \theta d\lambda \frac{1}{\lambda(B)} \int_{T^j B} f d\lambda &= \frac{1}{\lambda(B)} \int_{T^j B} g f d\lambda \int_{T^j B} \theta d\lambda \\ &= \int_{T^j B} g f d\lambda \left( \frac{1}{\lambda(B)} \int_B \theta d\lambda + \mathcal{O}_1(\delta h) \right). \end{aligned}$$

D'autre part on a aussi, en remarquant que  $|\theta g| \leq 1$ ,

$$\left| \int_{T^j B} g \theta \left( f - \frac{1}{\lambda(B)} \int_{T^j B} f d\lambda \right) d\lambda \right| \leq V_{T^j B}(f) \lambda(B) = \frac{\lambda(\mathcal{T})}{h} V_{T^j B}(f).$$

Comme  $|f g| \leq 1$ , on obtient par sommation l'égalité annoncée.  $\square$

**Lemme 4** Soit  $(T^j B)_{0 \leq j < h}$  une tour, on a pour tout entier  $k$  l'inégalité :

$$\lambda(B \cap \{\varphi^{(k)} \neq 1\}) \leq \left\lceil \frac{|k|}{h} + 1 \right\rceil \lambda(\{\varphi \neq 1\}). \quad (15)$$

Preuve : Prenons  $k > 0$  par exemple. Il suffit de remarquer que  $\{\varphi^{(k)} \neq 1\} \subset \cup_{0 \leq j < k} \{\varphi \circ T^j \neq 1\}$ , en posant  $A = \{\varphi \neq 1\}$  il vient alors naturellement :

$$\begin{aligned} \lambda(B \cap \{\varphi^{(k)} \neq 1\}) &\leq \sum_{0 \leq j < k} \lambda(B \cap T^{-j} A) \leq \sum_{0 \leq j < k} \lambda(T^j B \cap A) \\ &\leq \sum_{0 \leq i < k/h} \sum_{0 \leq j < h} \lambda(T^{ih+j} B \cap A) \\ &\leq \sum_{0 \leq i < k/h} \lambda(T^{ih} (\cup_{0 \leq j < h} T^j B) \cap A) \leq \left\lceil \frac{k}{h} + 1 \right\rceil \lambda(A). \end{aligned}$$

$\square$



**Lemme 5** Pour tout entier  $n$  on suppose qu'il existe deux fonctions de module 1,  $f_n$  et  $\gamma_n$ , et un réel  $x_n$  vérifiant

$$f_n \circ T = f_n e^{ix_n} \gamma_n .$$

Si on peut trouver  $(T^j B_n)_{0 \leq j < h_n}$  une suite de tours et  $N$  un entier indépendant de  $n$  de sorte qu'on ait :

- (i)  $\lambda(\cup_{0 \leq j < Nh_n} T^j B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ ,
- (ii)  $x_n h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,
- (iii)  $\lambda(\gamma_n \neq 1) h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,
- (iv)  $V_{B_n}(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Alors, il existe une suite  $(c_n)$  de constantes de module 1 telles que  $\|c_n f_n - 1\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Preuve : Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $c_n$  une constante de module 1, on a l'inégalité

$$\int_{\mathbb{T}} |1 - c_n f_n|^2 d\lambda \leq \sum_{0 \leq j < Nh_n} \int_{T^j B_n} |1 - c_n f_n|^2 d\lambda + 4(1 - \lambda(\cup_{0 \leq j < Nh_n} T^j B_n)) .$$

En remarquant que  $|f_n c_n - 1|^2 = 2 - f_n c_n - \overline{f_n c_n}$ , et que  $\overline{f_n}$  est une fonction de transfert associée à  $\overline{\gamma_n}$  et  $-x_n$ , on obtient à l'aide de (13), pour tout  $0 \leq j < Nh_n$  :

$$\begin{aligned} \int_{T^j B_n} |1 - c_n f_n|^2 d\lambda &\leq \int_{B_n} |1 - c_n f_n|^2 d\lambda + 2|x_n|j\lambda(B_n) + 4\lambda(B_n \cap \{\gamma_n^{(j)} \neq 1\}) \\ &\leq \int_{B_n} |1 - c_n f_n|^2 d\lambda + 2N|x_n| + 4N\lambda(\{\gamma_n \neq 1\}) \quad \text{par (15).} \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$V_{B_n}(f_n) = \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \left( \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} |f_n(x) - f_n(y)| dx \right) dy .$$

On peut trouver  $y_n$  tel que si  $\bar{c}_n = f_n(y_n)$ , on ait  $\frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} |f_n - \bar{c}_n| d\lambda \leq V_{B_n}(f_n)$ . Par conséquent, pour une constante  $c_n$  ainsi choisie on obtient

$$\int_{B_n} |1 - c_n f_n|^2 d\lambda \leq 2\lambda(B_n) V_{B_n}(f_n) ,$$

et en sommant dans les inégalités précédentes il vient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |1 - c_n f_n|^2 d\lambda &\leq 2NV_{B_n}(f_n) + 2N^2 h_n |x_n| + 4N^2 h_n \lambda(\{\gamma_n \neq 1\}) \\ &\quad + 4(1 - \lambda(\cup_{0 \leq j < Nh_n} T^j B_n)) . \end{aligned}$$

Pour une telle suite  $(c_n)$ , les hypothèses du lemme permettent donc clairement d'assurer la convergence forte dans  $L^2$  de  $(c_n f_n)$  vers 1.  $\square$

**Lemme 6** Soit  $(T^j B_n)_{0 \leq j < h_n}$  une suite de tours vérifiant  $\varliminf h_n \lambda(B_n) > 0$ . Alors pour toute fonction mesurable  $f$  de module 1, les deux propositions sont équivalentes :

- La distance dans  $L^2$  de la restriction de  $f$  à  $\cup_{j < h_n} T^j B_n$  sur le sous-espace engendré par les fonctions indicatrices des étages de  $(T^j B_n)_{j < h_n}$  converge vers 0.
- La moyenne des variations moyennes de  $f$  sur  $T^j B_n$  pour  $0 \leq j < h_n$  tend vers 0.

Preuve : En considérant la projection orthogonale dans  $L^2$  de  $f$  au sous-espace  $\mathcal{H}_n$  engendré par les  $(\mathbf{1}_{T^j B_n})_{j < h_n}$ , la distance de la restriction de  $f$  à  $\cup_{j < h_n} T^j B_n$  au sous-espace  $\mathcal{H}_n$  peut s'écrire

$$\begin{aligned} d^2(f \mathbf{1}_{\cup_{j < h_n} T^j B_n}, \mathcal{H}_n) &= \sum_{0 \leq j < h_n} \left( \int_{T^j B_n} |f|^2 d\lambda - \frac{1}{\lambda(B_n)} \left| \int_{T^j B_n} f d\lambda \right|^2 \right) \\ &= \sum_{0 \leq j < h_n} \frac{1}{\lambda(B_n)} \iint_{(T^j B_n)^2} (1 - f(x) \overline{f(y)}) dx dy \\ &= \frac{h_n \lambda(B_n)}{2} \frac{1}{h_n} \sum_{0 \leq j < h_n} \frac{1}{\lambda(B_n)^2} \iint_{(T^j B_n)^2} |f(x) - f(y)|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Notons pour tout borélien  $B$  de mesure non nulle,  $W_B(f) = \frac{1}{\lambda(B)^2} \iint_{B^2} |f(x) - f(y)|^2 dx dy$ . Comme  $f$  est une fonction de module 1, on a les inégalités :

$$V_B(f)^2 \leq W_B(f) \leq 2V_B(f).$$

Par conséquent,  $(\frac{1}{h_n} \sum_{j < h_n} W_{T^j B_n}(f))$  converge vers 0 si et seulement si la suite  $(\frac{1}{h_n} \sum_{j < h_n} V_{T^j B_n}(f))$  converge vers 0. Par ailleurs on avait

$$d^2(f \mathbf{1}_{\cup_{j < h_n} T^j B_n}, \mathcal{H}_n) = \frac{h_n \lambda(B_n)}{2} \frac{1}{h_n} \sum_{0 \leq j < h_n} W_{T^j B_n}(f).$$

Comme  $\varliminf \lambda(B_n) h_n > 0$  et  $h_n \lambda(B_n) \leq 1$ , on obtient bien l'équivalence annoncée.  $\square$

## Deuxième partie

# L'équation de cohomologie pour les fonctions en escalier.

### 3 Cas des fonctions à deux discontinuités.

Il s'agit dans cette partie de prouver le théorème 1 : la preuve se décompose en plusieurs étapes, dont la première est l'étude des cas triviaux traitée aux paragraphes 2.1.1 et 2.2.2. Le paragraphe qui suit est consacré à la recherche de conditions nécessaires à l'existence d'une solution à l'équation (3). On y montre que la suite des fonctions de transfert définie au paragraphe 2.2.2 converge fortement vers une fonction de transfert associée à  $\varphi_\beta$ . Comme ces fonctions sont proches de fonctions constantes sur les étages des tours de la rotation, on établit à l'aide des propriétés d'indépendance asymptotique de ces tours, une convergence plus forte qui aboutit, après un calcul explicite, aux conditions du théorème 1. Le second paragraphe montre le caractère suffisant de ces hypothèses.

#### 3.1 Conditions nécessaires.

Soit  $\beta \in \mathbb{T}$  et  $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , on note  $\varphi_\beta = \exp(2i\pi s\phi_\beta)$ . On suppose qu'il existe  $t \in \mathbb{T}$  et  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$  de module 1 tels que

$$\varphi_\beta = e^{2i\pi t} \frac{f}{f \circ T}.$$

On note  $(q_n)$  la suite des dénominateurs de la fraction continue associée à  $\alpha$ . Comme  $T^{q_n} \rightarrow I$  et que  $e^{-2i\pi q_n t} \varphi_\beta^{(q_n)} = f/f \circ T^{q_n}$ , on doit avoir la condition (6) :

$$e^{-2i\pi t q_n} \int_{\mathbb{T}} \varphi_\beta^{(q_n)} d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

On obtient en particulier que  $|\int_{\mathbb{T}} \varphi_\beta^{(q_n)} d\lambda| \rightarrow 1$ , d'où on déduit que  $\|\beta q_n\| \rightarrow 0$  (cf paragraphe 2.3.3). Estimons maintenant la valeur principale de  $\varphi_\beta^{(q_n)}$ . On a la propriété suivante

**Lemme 7** Pour tout  $\beta \in \mathbb{T}$  tel que  $\|\beta q_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , la suite des fonctions  $(\varphi_\beta^{(q_n)})_n$  converge vers 0 en mesure.

**Conséquence :** Il en résulte immédiatement la convergence de  $(\varphi_\beta^{(q_n)})$  vers 1 dans  $L^1$ .

Preuve : Comme  $\|\beta q_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , on peut trouver une suite d'entiers  $(k_n)$  vérifiant  $\lim k_n \alpha = \beta \pmod{1}$ , avec  $k_n/q_n \rightarrow 0$  et  $\|\beta - k_n \alpha\| q_n \rightarrow 0$ . On peut donc approcher  $\phi_\beta$  par  $\phi_{k_n \alpha}$ . On obtient à l'aide du paragraphe 2.1.1

$$\phi_\beta^{(q_n)} = \phi_{k_n \alpha}^{(q_n)} + \phi_{\beta - k_n \alpha}^{(q_n)} \circ T^{-k_n} = \omega_{k_n} - \omega_{k_n} \circ T^{q_n} + \phi_{\beta - k_n \alpha}^{(q_n)} \circ T^{-k_n}.$$

On sait que  $\phi_{\beta - k_n \alpha} = -\langle \beta - k_n \alpha \rangle$  en dehors d'un intervalle de longueur  $\|\beta - k_n \alpha\|$ . Par conséquent  $\phi_{\beta - k_n \alpha}^{(q_n)} = -q_n \langle \beta - k_n \alpha \rangle$  sauf sur un ensemble de mesure

inférieure à  $q_n \|\beta - k_n \alpha\|$ . Comme la suite  $(\|\beta - k_n \alpha\| q_n)$  converge vers 0, on trouve que  $(\phi_{\beta - k_n \alpha}^{(q_n)})$  converge vers 0 en mesure.

D'autre part,  $\omega_{k_n}$  est de pente constante  $k_n$ , et possède  $k_n$  discontinuités, aux points  $(T^j 0)_{0 \leq j \leq k_n}$  (en supposant par exemple  $k_n > 0$ ); alors  $\omega_{k_n} - \omega_{k_n} \circ T^{q_n}$  est constante et égale à  $k_n (-1)^n \alpha_n$ , sauf sur des intervalles de longueur  $\alpha_n$  de la forme  $[T^j 0, T^{j+q_n} 0]$  pour  $0 < j \leq k_n$ . Comme  $k_n \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , on en déduit que  $\omega_{k_n} - \omega_{k_n} \circ T^{q_n}$  converge vers 0 en mesure.  $\square$

D'après le lemme 7, la condition (6) entraîne donc la convergence de  $(\|t q_n\|)$  vers 0. On peut alors écrire

$$\beta = \sum_0^\infty b_n q_n \alpha \quad \text{et} \quad t = \sum_0^\infty b'_n q_n \alpha,$$

où  $(b_n)$  et  $(b'_n)$  sont des suites d'entiers vérifiant  $\lim b_n / a_{n+1} = \lim b'_n / a_{n+1} = 0$ . Nous noterons également comme dans la présentation (cf 2.2) :

$$\begin{cases} \beta_n = k_n \alpha, & k_n = \sum_0^{n-1} b_j q_j, \\ t_n = k'_n \alpha & \text{et} \quad k'_n = \sum_0^{n-1} b'_j q_j. \end{cases}$$

On rappelle que  $k_n$  et  $k'_n$  sont infiniment petits devant  $q_n$ , et que  $\|\beta - \beta_n\|$  et  $\|t - t_n\|$  sont infiniment petits devant  $\alpha_{n-1}$ .

Notons, toujours selon le paragraphe 2.2.2 pour tout  $n$ ,  $f_n = \exp(2i\pi \omega_{k_n, k'_n})$  : cette fonction est bien approchée par sa projection sur les étages de la tour majeure d'ordre  $n$  de la rotation, dont la mesure tend vers 1. De plus les suites  $(k_n \alpha)$  et  $(k'_n \alpha)$  convergent assez vite vers  $\beta$  et  $t$ . Ceci permet de montrer le résultat suivant :

**Proposition 2** S'il existe une solution à l'équation (1), quitte à multiplier  $f_n$  par une constante de module 1, la suite  $(f_n)$  définie précédemment converge fortement vers  $f$  dans  $L^2$ .

Preuve : Les égalités (3) et (8) permettent d'écrire :

$$(f \overline{f_n}) \circ T = (f \overline{f_n}) e^{2i\pi[(t-t_n)+s(\beta-\beta_n)]} e^{-2i\pi s} \mathbf{1}_{[\beta_n, \beta[}.$$

On va appliquer le lemme 5 pour la suite  $(f \overline{f_n})$  en choisissant la suite des tours majeures des domaines  $\mathcal{D}_n(\beta)$  (cf figure 3), qu'on note  $((T^j B_n)_{0 \leq j < q_n-1})_n$ . Vérifions les hypothèses du lemme 5 : la condition (i) est bien réalisée en prenant  $N = 2$ , et les conditions (ii) et (iii) résultent immédiatement du fait que  $(\|\beta - \beta_n\| q_n)$  et  $(\|t - t_n\| q_n)$  convergent vers 0. Enfin, il reste à vérifier que  $V_{B_n}(f \overline{f_n}) \rightarrow 0$ . Comme les discontinuités de  $f_n$  se trouvent aux extrémités des étages de  $(T^j B_n)_{0 \leq j < q_n-1}$ ,  $f_n$  est continue sur chacun des étages de la tour d'ordre  $n$ . Sur  $B_n$ ,  $\tilde{f}_n$  est donc affine et de pente  $sk_n + k'_n$  d'où  $V_{B_n}(f_n) \leq 2\pi |sk_n + k'_n| \alpha_{n-1} \rightarrow 0$ . De plus  $V_{B_n}(f \overline{f_n}) \leq V_{B_n}(f_n) + V_{B_n}(f)$ , et il suffit pour montrer le résultat de vérifier que la variation de  $f$  sur  $B_n$  converge bien vers 0.

$(B_n)$  étant une suite d'intervalles dont la mesure tend vers 0, la restriction de  $f$  à  $\cup_{0 \leq j < q_n-1} T^j B_n$  est proche dans  $L^2$  de sa projection orthogonale sur l'espace engendré par  $(\mathbf{1}_{T^j B_n})_{0 \leq j < q_n-1}$ . De plus  $(q_n - 1)\alpha_{n-1} \geq 1/2$ , et le lemme 6 assure donc que

$$\frac{1}{q_n - 1} \sum_{0 \leq j < q_n-1} V_{T^j B_n}(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par ailleurs  $\varphi_\beta$  est constante sur les intervalles ne contenant ni 0 ni  $\beta$ , elle est donc constante sur chaque  $T^j B_n$ , pour  $j \in \{0, \dots, q_n - 2\}$ . Alors pour tout  $x$  et  $y$  dans  $B_n$  on a  $\varphi_\beta^{(j)}(x) = \varphi_\beta^{(j)}(y)$ . Par conséquent, quelque soit  $j \in \{0, \dots, q_n - 2\}$ , pour tous  $x$  et  $y$  dans  $B_n$ ,

$$\begin{aligned} |f(T^j x) - f(T^j y)| &= |f(x)e^{2i\pi j t} \varphi_\beta^{(j)}(x) - f(y)e^{2i\pi j t} \varphi_\beta^{(j)}(y)| \\ &= |f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$

Il en résulte que la variation moyenne de  $f$  ne dépend pas de l'étage de la tour, et ceci entraîne bien que  $V_{B_n}(f) \rightarrow 0$ .  $\square$

On s'intéresse maintenant à  $\theta_n = f_{n+1} \bar{f}_n$  : d'après le paragraphe 2.2.2,  $\tilde{\theta}_n$  admet des discontinuités aux points de la forme  $(T^j 0)_{k_n < j \leq k_{n+1}}$  (si  $b_n > 0$ ), dont les sauts en ces points valent  $-s$ , et qui est affine et de pente constante égale à  $(b_n s + b'_n)q_n$  entre 2 discontinuités. Le but de ce paragraphe est d'expliciter à l'aide de  $\theta_n$  le résultat de la proposition précédente. C'est ce calcul qui aboutira aux conditions du théorème 1.

Comme  $(\|f_n - f_{n+1}\|_2)$  converge vers 0, on obtient :

$$\|1 - \theta_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Remarque :** lorsque  $b_n = 0$ ,  $\theta_n$  est simplement une fonction propre de  $T$  pour la valeur propre  $b'_n q_n \alpha$ . Comme  $(\theta_n)_n$  converge vers 1 dans  $L^2$ , pour  $n$  assez grand  $\theta_n$  est alors constante et égale à 1. On en déduit que pour  $n$  assez grand l'hypothèse  $b_n = 0$  entraîne  $b'_n = 0$  et  $f_{n+1} = f_n$ . Nous pourrions donc par la suite nous restreindre à l'ensemble des indices  $\Lambda$  défini par :

$$\Lambda = \{n, b_n \neq 0\}.$$

Notons pour la suite  $\psi_n = \exp -2i\pi s \mathbf{1}_{[0, b_n < q_n \alpha >]} \circ T^{-k_n}$ . D'après le paragraphe 2.2.2, et par analogie avec le paragraphe 2.4 on écrit :

$$\frac{\theta_n \circ T}{\theta_n} = e^{2i\pi(s b_n + b'_n) < q_n \alpha >} \psi_n.$$

Grâce à la représentation de  $\theta_n$  dans le domaine fondamental  $\mathcal{D}_n(\beta)$  (voir figure 5) on établit les propriétés suivantes (on rappelle que les ensembles  $(\mathcal{I}_n)$  sont définis par (10), voir figure 1 et 5).

**Lemme 8** Lorsque  $(b_n q_n \alpha_n)$  et  $(b'_n q_n \alpha_n)$  convergent vers 0, toutes les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\|1 - \theta_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,
- (ii) Pour toute suite d'intervalles  $(J_n)_n$  de longueur  $\alpha_{n-1}$ , on a

$$\frac{1}{\lambda(J_n)} \int_{J_n} (1 - \theta_n) d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

- (iii)  $s b_n + b'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , et  $\exists x_n \in B'_n$ ,  $\theta_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ ,
- (iv)  $\|(1 - \theta_n) \mathbf{1}_{\mathcal{I}_n^c}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Diagram illustrating the domain  $B_n^0$  in the  $(x, y)$  plane. The domain is a rectangle with width  $\alpha_{n-1}$  and height  $q_n$ . The x-axis is labeled with  $\beta_n$ ,  $\beta_n + \alpha_n$ ,  $\beta_{n+1}$ , and  $\beta_n + \alpha_{n-1}$ . The y-axis is labeled with  $0$  and  $q_n$ . The domain is divided into three regions:  $I_n$  (a vertical strip of width  $b_n \alpha_n$  on the left),  $B'_n$  (the central region), and a "Tour mineure" (a small shaded rectangle on the right). The text "Partie principale" is in the center. An arrow labeled "discontinuités de  $\theta_n$ " points to the vertical dashed lines in  $I_n$ . The label  $B_n$  is below the main rectangle, and  $B_n^0$  is below the shaded rectangle.

Supposons (i). Si  $J_n$  est un intervalle de longueur  $\alpha_{n-1}$ , alors  $(T^j J_n)_{0 \leq j < q_n}$  est une tour dont la mesure  $\alpha_{n-1} q_n$  est supérieure à  $1/2$ . Les relations (13) et (15) permettent d'écrire pour tout  $j \in \{0, \dots, q_n - 1\}$  :

$$\int_{I_n} \theta_n d\lambda = \int_{T^j I_n} \theta_n d\lambda + \mathcal{O}_1(2\pi |sb_n + b'_n| \alpha_n q_n \lambda(J_n) + 4\lambda(\{\psi_n \neq 1\})).$$

$$q_n \left| \int_{J_n} (1 - \theta_n) d\lambda \right| \leq \left| \int_{\cup_{0 \leq j < q_n} T^j J_n} (1 - \theta_n) d\lambda \right| + 2\pi |sb_n + b'_n| \alpha_n q_n (q_n \alpha_n - 1) + 4q_n \lambda(\{\psi_n \neq 1\}),$$
$$\frac{1}{\lambda(J_n)} \left| \int_{J_n} (1 - \theta_n) d\lambda \right| \leq 2 \|1 - \theta_n\|_1 + 2(\pi |sb_n + b'_n| + 4|b_n|) \alpha_n q_n.$$

Par hypothèse le second terme converge vers 0 et on en déduit (ii). Pour montrer que (ii) entraîne (iii), il suffit de calculer explicitement l'intégrale pour une suite  $(J_n)$  bien choisie. Supposons par exemple que  $b_n > 0$ . On choisit la suite des bases des tours majeures de la suite  $(\mathcal{D}_n(\beta))$ , qu'on note  $(B_n)$ . Comme les discontinuités de  $\theta_n$  sont toutes dans  $\mathcal{I}_n$ , celle-ci est continue sur le sous-intervalle de  $B_n$ ,  $B'_n = T^{-q_n}(\lceil \beta_{n+1}, T^{-q_{n-1}}\beta_n \rceil)$  (voir figure 5). On peut donc écrire pour tout  $x \in B'_n$

$$\theta_n(x) = c_n \exp(2i\pi(sb_n + b'_n)q_n x) \ ,$$

où  $c_n$  est une constante de module 1. Comme  $\lambda(B'_n)/\lambda(B_n) \rightarrow 1$ , (ii) entraîne

$$\int_{B_-} \frac{(1 - c_n e^{2i\pi(s b_n + b'_n) q_n x})}{\alpha_{n-1}} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le calcul de cette intégrale montre alors que  $|sb_n + b'_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et que  $(c_n)$  converge vers 1. On obtient donc (iii).

Supposons maintenant (iii) : dans  $\mathcal{D}_n(\beta)$ ,  $\mathcal{I}_n$  est égale à la réunion des étages de la tour majeure privée de sa partie principale (cf figure 5) : par conséquent il suffit de vérifier que  $\theta_n$  converge uniformément sur la partie principale et la tour mineure d'ordre  $n$ , de base  $B_n^0$ . Grâce à la relation (12), il suffit en fait de vérifier la convergence uniforme sur l'intervalle  $B'_n \cup B_n^0$ . Comme par construction  $\theta_n$  est continue sur cet intervalle de longueur inférieure à  $\alpha_{n-1}$ , affine et de pente constante égale à  $(sb_n + b'_n)q_n$  on déduit de (iii) que  $\|(1 - \theta_n) \mathbf{1}_{B'_n \cup B_n^0}\|_\infty$  converge vers 0.

Enfin si on suppose (iv), comme la mesure de  $\mathcal{I}_n$  converge vers 0, on en déduit immédiatement (i).  $\square$

**Remarque :** Comme  $sb_n + b'_n \rightarrow 0$ , si la suite  $(b_n)$  est bornée alors  $s$  est nécessairement rationnel. Dans ce cas pour tout  $n$  assez grand,  $b_n s \in \mathbb{Z}$  et  $-b'_n = b_n s$ .

Il reste pour terminer à évaluer la vitesse de convergence de  $(\int_{\mathbb{T}} \theta_n d\lambda)$  vers 1. Comme déjà dit dans le paragraphe 2.2.4, l'idée est d'approcher  $\int_{\mathbb{T}} f_n \theta_n d\lambda$  par le produit des intégrales, puis d'en déduire  $\prod |\int_{\mathbb{T}} \theta_n d\lambda| > 0$ .

Notons  $B_n$  la base de la tour majeure associée à  $\mathcal{D}_n(\beta)$  (cf paragraphe 2.3.2), et  $\mathcal{F}_n$  la tribu engendrée par les étages de  $\mathcal{D}_n(\beta)$ . Par construction,  $(\mathcal{F}_n)$  est une filtration qui engendre la tribu borélienne. On a d'abord les estimations suivantes :

**Proposition 3** On suppose que  $(b_n q_n \alpha_n)$  et  $(b'_n q_n \alpha_n)$  convergent vers 0. On note  $(f_n)$  et  $(\theta_n)$  les fonctions définies au paragraphe 2.2.2. Si de plus  $(\theta_n)$  converge vers 1 dans  $L^2$ , alors on peut trouver une suite  $(\varepsilon_n)$  qui converge vers 0 telle que pour tout  $n \in \Lambda$  et pour toute fonction  $g$   $\mathcal{F}_n$ -mesurable de module inférieur à 1 on ait :

$$\int_{\mathbb{T}} g f_{n+1} d\lambda = \int_{\mathbb{T}} g f_n d\lambda \left( \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \theta_n d\lambda \right) + \mathcal{O}_1(V_{B_n}(f_n) + \varepsilon_n \alpha_n q_n).$$

En notant  $\{n_j, j \in \mathbb{N}\}$  l'ensemble des éléments croissants de  $\Lambda$  on a aussi pour tout  $j$

$$V_{B_{n_j}}(f_{n_j}) = o(b_{n_{j-1}} \alpha_{n_{j-1}} q_{n_{j-1}}).$$

Preuve : On fixe  $n \in \Lambda$ . On note  $\mathcal{T}_n$  (respectivement  $\mathcal{T}_n^0$ ) la réunion des étages de la tour majeure (mineure) associée à  $\mathcal{D}_n(\beta)$ . Quitte à supprimer le premier ou le dernier étage de  $\mathcal{T}_n$ , on a  $\psi_n = 1$  sur  $\mathcal{T}_n$  et comme  $g$  est constante sur les étages de la tour majeure, on peut appliquer le lemme 3 (en remarquant que la variation de  $f_n$  est la même sur tous les étages) :

$$\int_{\mathcal{T}_n} g f_{n+1} d\lambda = \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{\mathcal{T}_n} g f_n d\lambda \int_{B_n} \theta_n d\lambda + \lambda(\mathcal{T}_n) \mathcal{O}_1(V_{B_n}(f_n) + \frac{2\pi |sb_n + b'_n| \alpha_n}{\alpha_{n-1}}).$$

Sur la tour mineure, on a plus simplement :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}_n^0} g f_{n+1} d\lambda &= \int_{\mathcal{T}_n^0} g f_n d\lambda \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \theta_n d\lambda + \int_{\mathcal{T}_n^0} g f_n \left( \theta_n - \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \theta_n d\lambda \right) d\lambda \\ &= \int_{\mathcal{T}_n^0} g f_n d\lambda \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \theta_n d\lambda \\ &\quad + \lambda(\mathcal{T}_n^0) \mathcal{O}_1 \left( \|(1 - \theta_n) \mathbf{1}_{\mathcal{T}_n^0}\|_\infty + \left| 1 - \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \theta_n d\lambda \right| \right). \end{aligned}$$

Posons maintenant  $\varepsilon_n = 4\pi|sb_n + b'_n| + \|(1 - \theta_n) \mathbf{1}_{\mathcal{T}_n^0}\|_\infty + \left| 1 - \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \theta_n d\lambda \right|$  : cette suite converge vers 0 d'après le lemme 8 et on obtient donc la première relation de l'énoncé en remarquant que  $\lambda(\mathcal{T}_n^0) = \alpha_n q_{n-1} \leq \alpha_n q_n$  et que  $1/\alpha_{n-1} \leq 2q_n$ .

En ce qui concerne l'estimation de  $V_{B_n}(f_n)$ , comme  $f_n$  est continue sur  $B_n$  on peut écrire  $V_{B_n}(f_n) \leq 2\pi|sk_n + k'_n|\alpha_{n-1}$ . Sachant que lorsque  $n$  est assez grand,  $b_n = 0$  entraîne  $b'_n = 0$ , on obtient pour tout  $j$  assez grand

$$sk_{n_j} + k'_{n_j} = \sum_{l=1}^{j-1} (sb_{n_l} + b'_{n_l})q_{n_l} = sk_{n_{j-1}} + k'_{n_{j-1}} + (sb_{n_{j-1}} + b'_{n_{j-1}})q_{n_{j-1}}.$$

Comme d'après les hypothèses,  $sk_n + k'_n = o(q_n)$  et  $b_n s + b'_n \rightarrow 0$ , il vient  $sk_{n_j} + k'_{n_j} = o(q_{n_{j-1}})$ . En remarquant que  $\alpha_{n_{j-1}} \leq |b_{n_{j-1}}|\alpha_{n_{j-1}}$ , on trouve bien l'estimation annoncée.  $\square$

Explicitons maintenant la proposition 3 appliquée à une fonction  $g$  choisie convenablement : comme  $(f_n)$  converge vers  $f$  qui n'est pas nulle, on peut trouver  $N$  et  $g$  une fonction  $\mathcal{F}_N$ -mesurable de module inférieur à 1 telle que  $\int_{\mathbb{T}} f g d\lambda \neq 0$  (et telle que pour tout  $n \geq N$ ,  $\int f_n g d\lambda \neq 0$ ). Alors pour tout  $j$  tel que  $n_j \geq N$ ,  $g$  est encore  $\mathcal{F}_{n_j}$ -mesurable et la proposition 3 donne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} g f_{n_{j+1}} d\lambda &= \\ &= \int_{\mathbb{T}} g f_{n_j} d\lambda \left( \frac{1}{\lambda(B_{n_j})} \int_{B_{n_j}} \theta_{n_j} d\lambda + o(b_{n_{j-1}} \alpha_{n_{j-1}} q_{n_{j-1}}) + o(|b_{n_j}| \alpha_{n_j} q_{n_j}) \right). \end{aligned}$$

Il en résulte que le produit correspondant

$$\prod_{j>0} \left| \frac{1}{\lambda(B_{n_j})} \int_{B_{n_j}} \theta_{n_j} d\lambda + o(b_{n_{j-1}} \alpha_{n_{j-1}} q_{n_{j-1}}) + o(|b_{n_j}| \alpha_{n_j} q_{n_j}) \right|$$

est strictement positif ce qui entraîne alors la convergence de la série de terme général

$$1 - \left| \frac{1}{\lambda(B_{n_j})} \int_{B_{n_j}} \theta_{n_j} d\lambda + o(b_{n_{j-1}} \alpha_{n_{j-1}} q_{n_{j-1}}) + o(|b_{n_j}| \alpha_{n_j} q_{n_j}) \right|. \quad (16)$$

Il reste à calculer l'intégrale de  $\theta_n$  sur  $B_n$ , pour  $n \in \Lambda$ . On a le résultat suivant :



**Lemme 9** On reprend les notations précédentes. On suppose que  $(b_n q_n \alpha_n)$ ,  $(b'_n q_n \alpha_n)$  et  $(b'_n + b_n s)$  convergent vers 0 ; alors on a

$$\frac{1}{\lambda(B_n)} \left| \int_{B_n} \theta_n d\lambda \right| = 1 - (b_n \alpha_n q_n + \frac{\pi^2}{6} (sb_n + b'_n)^2) (1 + o(1)).$$

Preuve : Il suffit de démontrer l'égalité pour  $n \in \Lambda$ . On suppose, pour alléger les notations que  $n$  est pair,  $k_n \geq 0$  et  $b_n > 0$ .  $B_n$  étant un intervalle de longueur  $\alpha_{n-1}$  il s'écrit  $B_n = [x_n, x_n + \alpha_{n-1}[$ . Sur  $B_n$ , on sait par construction que  $\theta_n$  est affine par morceaux de pente constante égale à  $q_n(sb_n + b'_n)$  et que, d'après le choix de  $\mathcal{D}_n(\beta)$ , ses discontinuités se trouvent aux points de la forme  $x_n + j\alpha_n$  pour  $j \in \{1, \dots, b_n\}$  (cf figure 5). Comme les sauts aux discontinuités sont constants et égaux à  $-s$ , on peut donc écrire sur  $[x_n, x_n + b_n \alpha_n[ (= I_n)$

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \theta_n d\lambda &= \sum_{j=0}^{b_n-1} \int_{x_n+j\alpha_n}^{x_n+(j+1)\alpha_n} \theta_n d\lambda \\ &= \sum_{j=0}^{b_n-1} e^{i\pi j(-s+q_n(b_n s+b'_n)\alpha_n)} \int_{x_n}^{x_n+\alpha_n} \theta_n d\lambda \\ &= e^{i\pi b_n(-s+q_n \alpha_n(b_n s+b'_n))} \frac{\sin(\pi b_n(-s+q_n \alpha_n(b_n s+b'_n)))}{\sin \pi(-s+q_n \alpha_n(b_n s+b'_n))} \int_{x_n}^{x_n+\alpha_n} \theta_n d\lambda \end{aligned}$$

Or, on sait que,  $(b_n q_n \alpha_n(b_n s + b'_n))_n$  converge vers 0, que  $s \notin \mathbb{Z}$  et que  $(\|b_n s\|)_n$  converge vers 0. Par conséquent on obtient

$$\left| \int_{I_n} \theta_n d\lambda \right| = o\left( \int_{x_n}^{x_n+\alpha_n} \theta_n d\lambda \right) = o(\alpha_n).$$

Sur  $B'_n$ ,  $\theta_n$  est continue, affine et de pente  $q_n(sb_n + b'_n)$ , d'où, en notant  $\alpha'_{n-1} = \alpha_{n-1} - b_n \alpha_n$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{B'_n} \theta_n d\lambda \right| &= \int_{-\alpha'_{n-1}/2}^{\alpha'_{n-1}/2} e^{2i\pi q_n(sb_n+b'_n)x} dx \\ &= \frac{\sin(\pi(sb_n+b'_n)q_n \alpha'_{n-1})}{\pi(sb_n+b'_n)q_n \alpha'_{n-1}} \\ &= \alpha'_{n-1} \left( 1 - \frac{\pi^2}{6} (b_n s + b'_n)^2 (\alpha'_{n-1} q_n)^2 (1 + o(1)) \right). \end{aligned}$$

Comme sur  $\Lambda$ ,  $\int_{I_n} \theta_n d\lambda = o(\int_{B'_n} \theta_n d\lambda)$  et que la suite  $(q_n \alpha_{n-1})$  converge vers 1, on obtient finalement le résultat annoncé.  $\square$

Il résulte de ce lemme et de la convergence de la série donnée par (16) qu'une série de terme général du type

$$\frac{\pi^2}{6} (b_{n_j} s + b'_{n_j})^2 (1 + o(1)) + |b_{n_j}| q_{n_j} \alpha_{n_j} (1 + o(1)) + o(|b_{n_{j-1}}| q_{n_{j-1}} \alpha_{n_{j-1}})$$

est convergente. Nous en déduisons finalement les conditions du théorème 1 :

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{|b_n|}{a_{n+1}} &< +\infty \\ \sum_n (b_n s + b'_n)^2 &< +\infty. \end{aligned}$$

Ceci clôt la recherche des conditions nécessaires à l'existence de solutions à l'équation de cobord.

### 3.2 Des conditions suffisantes.

On suppose maintenant les conditions du théorème 1 : il existe une suite d'entiers  $(b_n)_{n \geq 0}$  telle que

$$\beta = \sum_0^\infty b_n q_n \alpha \quad \text{avec} \quad \sum_n \frac{|b_n|}{a_{n+1}} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_n \|b_n s\|^2 < \infty.$$

Posons  $t = \sum_n b'_n q_n \alpha$  avec  $b'_n = -[b_n s]$  : il suffit de montrer qu'on peut construire une fonction  $f$  telle que l'équation (3) soit vérifiée.

On reprend les notations des paragraphes précédents. On choisit la constante des fonctions  $\theta_n$  du paragraphe 2.2.2 de sorte que  $\theta_n(m_n) = 1$ , où  $m_n$  désigne le milieu de  $B'_n$ . Pour trouver une fonction  $f$  vérifiant (3) il suffit de montrer que la suite  $(f_n)$  définie par  $f_n = \prod_0^{n-1} \theta_k$  admet une valeur d'adhérence pour la topologie faible  $L^2$  qui soit non identiquement nulle. Pour cela, on utilise la proposition 3 : par construction de  $(\theta_n)$  les hypothèses de la proposition sont bien vérifiées. L'estimation de  $V_{B_n}(f_n)$  donnée par cette proposition et la sommabilité de la série  $(|b_n| q_n \alpha_n)$  permettent d'affirmer qu'il existe une suite sommable  $(u_n)$  vérifiant : pour tout  $n$  et pour toute  $g$   $\mathcal{F}_n$ -mesurable de module inférieur à 1, on a

$$\int_{\mathbb{T}} f_{n+1} g d\lambda = \int_{\mathbb{T}} f_n g d\lambda \left( \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \theta_n d\lambda \right) + u_n.$$

D'autre part les conditions arithmétiques sur  $(b_n)$  et le choix de  $(\theta_n)$  donnent grâce au lemme 9 :

$$\sum_{n > 0} \left| 1 - \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \theta_n d\lambda \right| < +\infty.$$

Par conséquent le produit  $\prod_{n > 0} \left( \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \theta_n d\lambda \right)$  converge vers une limite non nulle. On déduit de ces remarques que toute valeur d'adhérence faible de  $(f_n)$ ,  $f$ , satisfait : pour tout  $n$  et pour toute fonction  $g$   $\mathcal{F}_n$ -mesurable de module inférieur à 1,

$$\int_{\mathbb{T}} f g d\lambda = \int_{\mathbb{T}} f_n g d\lambda \prod_{k=n}^\infty \frac{1}{\lambda(B_k)} \int_{B_k} \theta_k d\lambda + \mathcal{O}_1 \left( \sum_{k=n}^\infty u_k \right).$$

Comme  $\prod_n^\infty \frac{1}{\lambda(B_k)} \int_{B_k} \theta_k d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  et  $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , pour tout  $n$  assez grand on a  $\sum_{k \geq n} u_k < 1/4$  et  $\prod_{k \geq n} \frac{1}{\lambda(B_k)} \left| \int_{B_k} \theta_k d\lambda \right| > 1/2$ . Il reste maintenant à trouver  $n$  et  $g$  de sorte que  $\left| \int_{\mathbb{T}} g f_n d\lambda \right|$  soit strictement supérieur à  $1/2$  : on sait par construction que  $f_n$  est affine sur chacun des étages de  $\mathcal{D}_n(\beta)$  (ses discontinuités sont sur le bord des étages), et de pente constante égale à  $(sk_n + k'_n)$ . Par conséquent sa variation moyenne sur chacun des étages de  $\mathcal{D}_n(\beta)$  est de l'ordre de  $\mathcal{O}_1(\alpha_{n-1}(sk_n + k'_n))$  qui converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Choisissons  $\bar{g} = \mathbb{E}[f_n | \mathcal{F}_n]$  la projection orthogonale de  $f_n$  sur les étages de

$\mathcal{D}_n(\beta)$ , on obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} f_n g d\lambda &= \|f_n\|_2^2 - \|f_n - \bar{g}\|_2^2 \\
&= 1 - \sum_{j=0}^{q_n-1} \int_{T^j B_n} |f_n - \bar{g}|^2 d\lambda + \mathcal{O}_1(\alpha_n q_{n-1}) \\
&= 1 - \mathcal{O}_1(q_n \alpha_{n-1} (sk_n + k'_n) \alpha_{n-1} + q_{n-1} \alpha_n) \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.
\end{aligned}$$

Pour  $n$  assez grand on peut donc trouver  $g$   $\mathcal{F}_n$ -mesurable telle que  $|g| \leq 1$  et  $|\int_{\mathbb{T}} f_n g d\lambda| > 1/2$ . Ceci montre donc que  $|\int_{\mathbb{T}} f g d\lambda| > 0$ . Finalement  $f$  est non nulle et la réciproque est bien complète.

**Remarque :** En raison des résultats du paragraphe précédent, on obtient en fait que la suite  $(f_n)$  converge fortement dans  $L^1$  vers la fonction de transfert  $f$ .

## 4 Cas général des fonctions en escalier.

L'objet de cette partie est la preuve du théorème 2. On se donne, pour un entier  $m$  non nul  $m+1$  éléments de  $\mathbb{T}$  distincts  $(\beta_j)_{j \geq 0}$  tels que  $\beta_0 = 0$ , et  $m+1$  réels non entiers de somme nulle  $(s_j)_{j \geq 0}$ . On note ensuite

$$\phi = \sum_{j=0}^m s_j \phi_{\beta_j}, \quad \text{et} \quad \varphi = \exp(2i\pi\phi).$$

Le plan suivi est analogue à celui de la partie précédente : Le premier paragraphe est consacré à la nécessité des conditions du théorème 2, sous l'hypothèse du théorème sur l'unicité de l'écriture de  $\phi$ . le second paragraphe établit la preuve de la réciproque en toute généralité.

### 4.1 Conditions nécessaires.

On travaille ici avec l'hypothèse suivante :

Pour toute partie stricte non vide  $J$  de  $\{0, \dots, m\}$ , on a  $\sum_J s_j \notin \mathbb{Z}$ . (H)

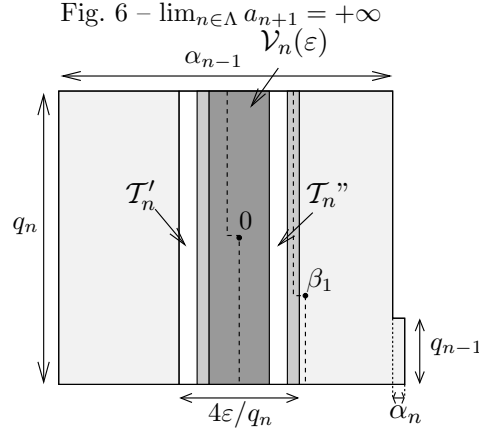
Comme précédemment, on suppose qu'il existe  $t \in \mathbb{T}$  et  $F$  mesurable de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{S}^1$  vérifiant

$$\varphi = e^{2i\pi t} \frac{F}{F \circ T}, \quad (17)$$

et on note  $\tilde{F}$  un relevé de  $F$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### 4.1.1 Décomposition d'Ostrowski.

Nous avons toujours d'après (17) la condition spectrale  $|\int_{\mathbb{T}} \varphi^{(q_n)} d\lambda| \rightarrow 1$ . Avec l'hypothèse (H), on établit la proposition suivante :



**Proposition 4** Sous l'hypothèse (H), si  $|\int_{\mathbb{T}} \varphi^{(q_n)} d\lambda| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ , alors on a pour tout  $j \in \{0, \dots, m\}$

$$\|\beta_j q_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Preuve : Supposons par l'absurde qu'il existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\|\beta_j q_n\|$  ne converge pas vers 0. On pose par exemple  $j = 1$ . Alors l'équivalence (42) (voir l'appendice) montre qu'on peut trouver  $\varepsilon > 0$  et un ensemble infini d'entiers,  $\Lambda_1$ , tels que  $\beta_1 \notin \cup_{n \in \Lambda_1} \mathcal{V}_n(\varepsilon)$ , où on a posé  $h_n = \min(\varepsilon/\alpha_n, q_n/2)$  et

$$\mathcal{V}_n(\varepsilon) = \{x_n + k_n \alpha_n, |x_n| \leq \varepsilon/q_n, \text{ et } |k_n| \leq h_n\}.$$

Remarquons que lorsque  $\varepsilon \leq 1/4$ , l'écriture dans  $\mathcal{V}_n(\varepsilon)$  est unique et qu'on peut donc le représenter dans un domaine fondamental d'ordre  $n$  par un rectangle (voir figure 13). De plus, ces rectangles sont croissants en fonction de  $\varepsilon$ . On répartit maintenant les  $(\beta_i)$  en deux catégories, selon que  $\beta_i$  est dans  $\varliminf_{n \in \Lambda_1} \mathcal{V}_n(\varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon$ , ou non. Par extractions successives, on peut donc trouver un ensemble infini d'entiers,  $\Lambda$ , et  $\varepsilon_0 \in ]0, 1/8[$  tels que pour tout  $i \in \{0, \dots, m\}$  on ait

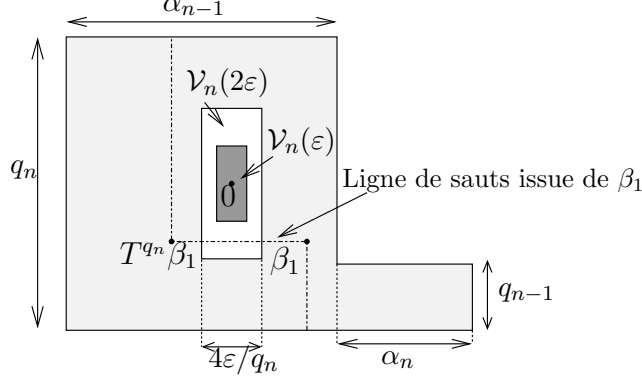
- (i) ou bien  $\beta_i \in \varliminf_{n \in \Lambda} \mathcal{V}_n(\varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ ,
- (ii) ou bien  $\beta_i \notin \cup_{n \in \Lambda} \mathcal{V}_n(2\varepsilon_0)$ .

On notera  $I = \{i \in \{0, \dots, m\}, \beta_i \text{ satisfait (i)}\}$ . Remarquons que  $I$  est une partie non triviale de  $\{0, \dots, m\}$  (car  $0 \in I$  mais  $1 \notin I$ ). Enfin, on peut encore supposer, quitte à restreindre  $\Lambda$ , que  $\lim_{n \in \Lambda} a_{n+1} = +\infty$ , ou que  $\overline{\lim}_{n \in \Lambda} a_{n+1} < \infty$ .

**Premier cas :**  $\lim_{n \in \Lambda} a_{n+1} = \infty$ .

Choisissons  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , de sorte que pour tout  $i \notin I$ ,  $\beta_i \notin \cup_{n \in \Lambda} \mathcal{V}_n(2\varepsilon)$ . Comme dans ce cas la suite  $(\alpha_n q_n)_n$  converge vers 0, on peut aussi supposer que pour tout  $n \in \Lambda$ , on a  $\alpha_n q_n < \varepsilon/2$ . Alors  $\mathcal{V}_n(\varepsilon)$  et  $\mathcal{V}_n(2\varepsilon)$  sont deux tours de hauteur  $q_n$ , qu'on peut représenter dans un domaine fondamental d'ordre  $n$  (voir figure 6). Dans  $\mathcal{V}_n(2\varepsilon) \setminus \mathcal{V}_n(\varepsilon)$  il n'y a aucun des  $\beta_i$ . De plus les discontinuités de  $\phi^{(q_n)}$  issues d'un  $\beta_i$  sont contenues dans une tour de largeur  $\alpha_n$  limitée à droite par  $\beta_i$  (cas  $n$  pair, cf figure 6). On en déduit qu'il existe deux tours d'intervalles, dont on note  $T'_n$  et  $T''_n$  la réunion des étages, de hauteur  $q_n$  incluses dans  $\mathcal{V}_n(2\varepsilon)$ , situées de part et d'autre de  $\mathcal{V}_n(\varepsilon)$ , de largeur  $\varepsilon/q_n - \alpha_n$ , et dans lesquelles  $\phi^{(q_n)}$  ne possède aucune discontinuité. Par conséquent  $\phi^{(q_n)}$  est constante sur

Fig. 7 –  $\overline{\lim}_{n \in \Lambda} a_{n+1} < \infty$



chacune de ces tours (cf paragraphe 2.3.3). Enfin, pour passer d'un étage de  $\mathcal{T}'_n$  à un étage de  $\mathcal{T}''_n$ , il faut franchir toutes les discontinuités issues des points dans  $\mathcal{V}_n(\varepsilon)$ , c'est à dire que le saut de  $\phi^{(q_n)}$  entre  $\mathcal{T}'_n$  et  $\mathcal{T}''_n$  est égal à la somme des sauts  $-s_i$  pour  $i \in I$  : il en découle que

$$\left| \int_{\mathcal{T}'_n} \varphi^{(q_n)} d\lambda - \int_{\mathcal{T}''_n} \varphi^{(q_n)} d\lambda \right| = \varepsilon |1 - e^{-2i\pi \sum_{k \in I} s_k}|.$$

Comme  $\alpha_n < \varepsilon/2q_n$ , on a  $\lambda(\mathcal{T}'_n) = \lambda(\mathcal{T}''_n) > \varepsilon/2$ . Or, on doit avoir  $|\int_{\mathbb{T}} \varphi^{(q_n)} d\lambda| \rightarrow 1$ , donc nécessairement  $\sum_{k \in I} s_k = 0 \pmod 1$ . Avec l'hypothèse (H), ceci implique que  $I$  doit être triviale, ce qui est absurde.

**Second cas :**  $\overline{\lim}_{n \in \Lambda} a_{n+1} < \infty$ .

Comme on a  $\underline{\lim}_{n \in \Lambda} \alpha_n q_n > 0$ , on choisit  $\varepsilon < \varepsilon_0$  tel que  $4\varepsilon/q_n < \alpha_n$  pour tout  $n \in \Lambda$ . Alors pour tout  $i \notin I$ ,  $\beta_i \notin \cup_{n \in \Lambda} \mathcal{V}_n(2\varepsilon)$ . On s'intéresse à la répartition des valeurs de  $\phi^{(q_n)}$  dans  $\mathcal{V}_n(2\varepsilon)$ . Rappelons que dans un domaine fondamental d'ordre  $n$ ,  $\phi^{(q_n)}$  est constante sur les intervalles des étages qui ne contiennent pas les points  $(T^{-j}\beta_i)_{0 \leq j < q_n}$ , et constante sur leur images, s'ils sont disjoints de  $[T^{-q_n}\beta_i, \beta_i[$  (cf paragraphe 2.3.3). Par conséquent, dans n'importe quel domaine fondamental d'ordre  $n$ ,  $\phi^{(q_n)}$  est constante dans toutes les parties connexes délimitées par les lignes brisées issues des  $\beta_i$  (qui indiquent les instants de saut  $-s_i$ , si  $n$  pair, pour  $\phi^{(q_n)}$ ) : on les appellera lignes de sauts issues de  $\beta_i$  (voir la figure 7).

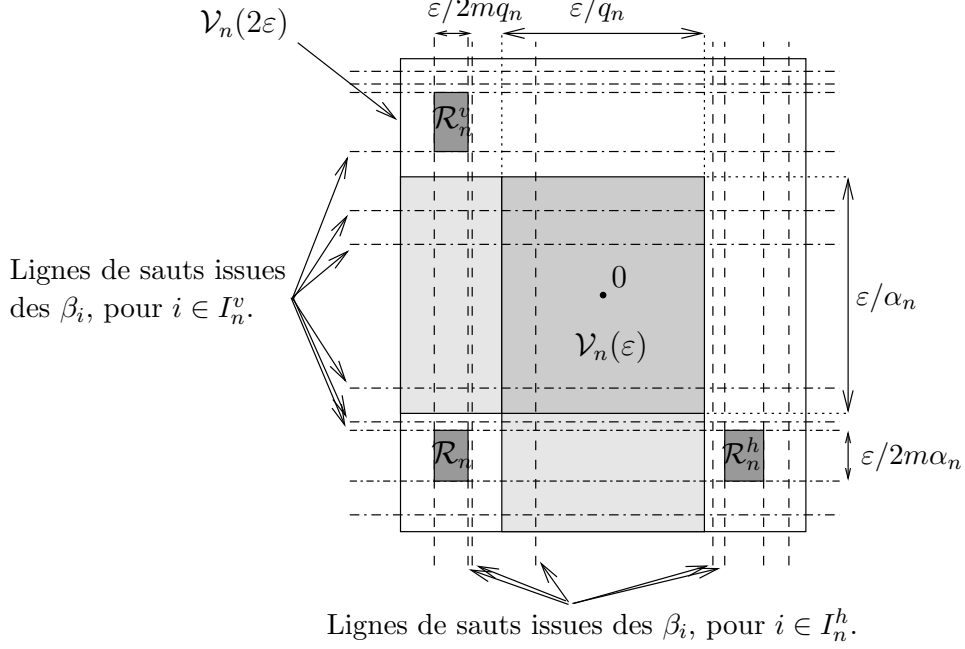
– Lorsque  $i \in I$ , les lignes de sauts issues de  $\beta_i$  sont incluses dans une bande brisée coupant  $\mathcal{V}_n(2\varepsilon)$  en deux parties (représentées par les parties claires de la figure 8).

– Si  $i \notin I$  et que  $T^{q_n}\beta_i \notin \mathcal{V}_n(2\varepsilon)$ , la ligne de sauts issue de  $\beta_i$  traverse éventuellement  $\mathcal{V}_n(2\varepsilon)$  selon une droite horizontale ou verticale (le “ou” est exclusif ici car sinon, on aurait  $\beta_i \in \mathcal{V}_n(2\varepsilon)$ ).

– Si  $i \notin I$  et que  $T^{q_n}\beta_i \in \mathcal{V}_n(2\varepsilon)$ , la ligne de saut issue de  $\beta_i$  ne coupe que le bord haut et le bord droit de  $\mathcal{V}_n(2\varepsilon)$  (cas  $n$  pair).

Comme il y a au plus  $m$  lignes de sauts, on peut trouver dans  $\mathcal{V}_n(2\varepsilon) \setminus \mathcal{V}_n(\varepsilon)$  2 tours l'une à gauche et l'autre à droite de  $\mathcal{V}_n(\varepsilon)$ , de hauteurs  $2\varepsilon/\alpha_n$  et de largeurs  $\varepsilon/2mq_n$  et qui ne contiennent aucune partie verticale des lignes de sauts (c'est à dire aucun des  $T^j\beta_i$  pour  $0 < j \leq q_n$ ,  $0 \leq i \leq m$ ). De la même manière on

Fig. 8 – Lignes de sauts dans  $\mathcal{V}_n(2\varepsilon)$ .



trouve 2 tours, l'une en dessous et l'autre au dessus de  $\mathcal{V}_n(\varepsilon)$ , de largeurs  $2\varepsilon/q_n$  et de hauteurs  $\varepsilon/2m\alpha_n$  dont les étages sont disjoints des lignes de sauts (c'est à dire disjoints des intervalles  $[T^{q_n}\beta_i, \beta_i]$ ). Les intersections de ces tours dans  $\mathcal{V}_n(2\varepsilon)$  forment 4 tours qui sont disjoints de toutes les lignes de sauts : les 3 qui nous intéressent sont représentées par  $\mathcal{R}_n$ ,  $\mathcal{R}_n^h$  et  $\mathcal{R}_n^v$  sur la figure 8. Sur chacune de ces tours,  $\phi^{(q_n)}$  est donc constante, et comme la mesure de chacune de ces tours est supérieure à  $\varepsilon^2/4m^2$ , la condition  $|\int_{\mathbb{T}} \varphi^{(q_n)} d\lambda| \rightarrow 1$  impose donc que les valeurs de  $\phi^{(q_n)}$  sur chacune d'elles soient égales modulo 1 pour tout  $n$  assez grand (car il n'y a qu'un nombre fini de sauts). Il suffit pour terminer de compter les sauts de  $\phi^{(q_n)}$  pour passer d'une tour à l'autre. Pour aller de  $\mathcal{R}_n$  à  $\mathcal{R}_n^h$  ou à  $\mathcal{R}_n^v$ , il faut traverser toutes les lignes de sauts issues des  $\beta_i$  pour  $i \in I$ . On note ensuite  $I_n^v$  (resp.  $I_n^h$ ) l'ensemble des indices  $i \notin I$  des lignes de sauts qu'on doit traverser pour aller de  $\mathcal{R}_n$  à  $\mathcal{R}_n^v$  (resp.  $\mathcal{R}_n^h$ ). On doit donc avoir pour tout  $n$  assez grand  $\sum_{I \cup I_n^h} s_i = \sum_{I \cup I_n^v} s_i = 0 \pmod{1}$ . Alors comme  $I$  est non vide, on a nécessairement que  $I_n^h \cup I$  et  $I_n^v \cup I$  sont égaux à  $\{0, \dots, m\}$ . Mais  $\beta_i \notin \mathcal{V}_n(2\varepsilon)$  si  $i \notin I$ , donc  $I_n^v$  et  $I_n^h$  sont disjoints. Par conséquent ces 2 ensembles sont nécessairement vides, et  $I$  contient donc 1 ce qui est absurde.  $\square$

L'existence d'une suite de fonctions de transfert convergeant fortement dans  $L^2$  vers  $F$  se démontre maintenant comme dans la partie précédente.

D'après la proposition 4, on peut appliquer le lemme 7 pour tout  $\beta_j$ , donc  $(\phi_{\beta_j}^{(q_n)})$  converge vers 0 en mesure. On en déduit que  $(\varphi^{(q_n)})$  tend vers 1 dans  $L^1$ . De la condition (6) il vient alors  $\|tq_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . De là on obtient les décompositions :

$$\forall j \in \{0, \dots, m\}, \quad \beta_j = \sum_0^\infty b_n^{(j)} q_n \alpha \quad \text{et} \quad t = \sum_1^\infty b'_n q_n \alpha,$$

où  $(b_n^{(j)})$  et  $(b'_n)$  sont des suites d'entiers vérifiant  $\lim b_n^{(j)}/a_{n+1} = \lim b'_n/a_{n+1} = 0$ . Nous utiliserons pour la suite les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\beta_n^{(j)} &= k_n^{(j)}\alpha \quad \text{avec} \quad k_n^{(j)} = \sum_{l=0}^{n-1} b_l^{(j)}q_l, \\ t_n &= k'_n\alpha \quad \text{avec} \quad k'_n = \sum_{j=0}^{n-1} b'_jq_j.\end{aligned}$$

On remarquera que  $k_n^{(j)}$  et  $k'_n$  sont infiniment petits devant  $q_n$ , et que  $\|\beta_j - \beta_n^{(j)}\|$  et  $\|t - t_n\|$  sont infiniment petits devant  $\alpha_{n-1}$ .

#### 4.1.2 Représentation. Choix des Domaines Fondamentaux.

Nous avons besoin, comme dans la partie précédente de représenter les suites des fonctions de transfert à l'aide des domaines fondamentaux décrits au paragraphe 2.3.2. Il suffira, comme auparavant, d'étudier les termes de cette suite pour les indices  $n$  dans l'ensemble

$$\Lambda = \{n \in \mathbb{N}, \max_j (|b_n^{(j)}|) > 0\}.$$

Une première simplification consiste à ne considérer que les cas où tous les  $b_n^{(j)}$  sont positifs : pour cela il suffit de translater  $\phi$  par  $\beta_{\min} = \sum_{n \in \Lambda} \min(b_n^{(j)} - 1)q_n\alpha$ . La nouvelle fonction obtenue, encore notée  $\phi$  est toujours un quasibord, associé à la même valeur propre  $t$ , et à la fonction de transfert translaturée. Elle s'écrit encore sous la forme  $\sum_0^m s_j\phi_{\beta_j}$ , où les  $(s_j)$  sont inchangés, et les  $\beta_j$  sont les translatés des anciens. On obtient donc bien

$$\text{Pour tout } j \in \{0, \dots, m\}, \quad \beta_j = \sum_n b_n^{(j)}q_n\alpha \quad \text{avec } \forall n, b_n^{(j)} \geq 0.$$

De plus on a la propriété suivante :

$$n \in \Lambda \iff \left( \min_j (b_n^{(j)}) = 1 \text{ et } \max_j (b_n^{(j)}) \geq 2 \right).$$

Pour tout  $n$  on définit  $b_n = \max_j (b_n^{(j)})$  et  $k_n = \sum_0^{n-1} b_i q_i$ , puis on note  $\beta = \sum_0^\infty b_n q_n \alpha$ . On a comme dans la partie précédente  $\|\beta q_n\| \rightarrow 0$ . On choisira pour la suite de représenter les fonctions de transfert dans les domaines fondamentaux associés à  $\beta$ ,  $\mathcal{D}_n(\beta)$  (cf paragraphe 2.3.2). Pour  $n \in \Lambda$  fixé, assez grand pour que  $b_n < a_{n+1}/2$ , on localise facilement les points  $(\beta_j)_j$  et  $(\beta_n^{(j)})$  selon la figure 9.

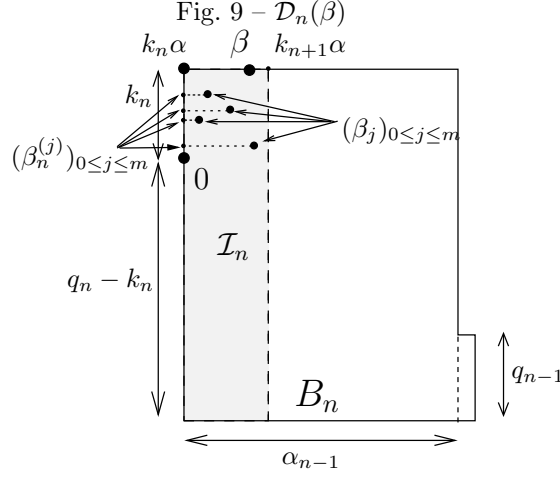
#### 4.1.3 Convergence forte des fonctions de transfert.

Posons avec les notations du paragraphe 2.1.1 et par analogie avec 2.2.2,

$$\tilde{F}_n = \sum_{j=0}^m s_j \omega_{k_n^{(j)}} + k'_n \omega.$$

D'après le paragraphe 2.1.1 on a l'égalité

$$\sum_0^m s_j \phi_{\beta_n^{(j)}} = k'_n \alpha + \tilde{F}_n - \tilde{F}_n \circ T \quad \text{mod } 1.$$



Pour tout  $n$  on définit  $F_n = e^{2i\pi \tilde{F}_n}$ , on obtient la proposition suivante :

**Proposition 5** Sous l'hypothèse (H), si  $\varphi$  est un quasi-cobord, quitte à multiplier  $F_n$  par une constante de module 1, la suite de fonctions  $(F_n)_n$  converge fortement dans  $L^2$  vers  $F$ .

Preuve : Comme  $\varphi = \exp(2i\pi t)F/F \circ T$ , on obtient avec ce qui précède l'égalité

$$(F\overline{F_n}) \circ T = (F\overline{F_n}) e^{2i\pi((t-t_n) + \sum_0^m s_j(\beta_j - \beta_n^{(j)}))} \exp\left(2i\pi \sum_0^m s_j \mathbf{1}_{[\beta_n^{(j)}, \beta_j[}\right).$$

On veut maintenant appliquer le lemme 5 pour la suite de fonctions  $(F\overline{F_n})$  : pour cela on choisit la suite des tours majeures de  $\mathcal{D}_n(\beta)$ ,  $(T^j B_n)_{0 \leq j < q_n}$ . (cf figure 9). On vérifie ensuite les hypothèses du lemme 5 :

La condition (i) est bien vérifiée pour  $N = 2$ .

Les conditions (ii) et (iii) découlent de la convergence des suites  $(\|t - t_n\|q_n)$  et  $(q_n \sum_{j=0}^m \|\beta_j - \beta_n^{(j)}\|)$  vers 0.

Reste la condition (iv) :  $V_{B_n}(F\overline{F_n}) \rightarrow 0$ . Pour la variation de  $F_n$ , lorsque  $n \in \Lambda$ , les discontinuités de  $F_n$  sont contenues dans l'ensemble des points  $(T^k 0)_{0 \leq k < k_n}$ , qui se trouvent sur le bord de la tour d'indice  $n$ . Par conséquent sur la base  $B_n$ ,  $F_n$  est affine et sa variation est majorée par  $2\pi\alpha_{n-1}|\sum_{j < p} k_n^{(j)} + k'_n|$ , qui converge bien vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ . Enfin, pour montrer la convergence vers 0 de  $V_{B_n}(F)$ , il suffit d'appliquer le lemme 6 avec la suite des tours  $(T^j B_n)_{0 \leq j < q_n - k_n}$ , en remarquant que comme  $\varphi$  est constante sur chacun des étages de ces tours, la variation de  $F$  sur  $T^j B_n$  est indépendante de  $j < q_n - k_n$  (cf proposition 2). Ceci assure la condition (iv) du lemme 5, et montre, quitte à multiplier  $F_n$  par une constante de module 1, la convergence de la suite  $(F_n)$  vers  $F$  dans  $L^2$ .  $\square$

#### 4.1.4 Récurrence.

Les conditions arithmétiques du théorème 2 s'obtiennent selon le plan suivi dans la partie précédente :



Comme précédemment, on note  $\tilde{\Theta}_n = \tilde{F}_{n+1} - \tilde{F}_n$ . C'est encore une fonction de transfert, qui satisfait l'équation :

$$\sum_{j=0}^m s_j \phi_{b_n^{(j)} q_n \alpha} \circ T^{-k_n^{(j)}} = b'_n q_n \alpha + \tilde{\Theta}_n - \tilde{\Theta}_n \circ T \pmod{1}.$$

Par construction,  $\tilde{\Theta}_n$  est affine par morceaux et de pente constante égale à  $(\sum_{j=0}^m s_j b_n^{(j)} + b'_n) q_n$ . L'ensemble de ses discontinuités est inclus dans  $\{T^k 0, 0 \leq k < k_{n+1}\}$ . On note, comme dans la partie précédente,

$$\Psi_n = \exp - \sum_{j=0}^m s_j \mathbf{1}_{[0, b_n^{(j)} < q_n \alpha >[} \circ T^{-k_n^{(j)}}.$$

Alors la relation entre  $\Theta_n$  et  $\Psi_n$  s'écrit :

$$\frac{\Theta_n \circ T}{\Theta_n} = \Psi_n e^{2i\pi(\sum_{j=0}^m s_j b_n^{(j)} + b'_n) < q_n \alpha >}. \quad (18)$$

Comme  $F_n$  converge dans  $L^2$  vers  $F$ ,  $\Theta_n$  converge vers 1 dans  $L^2$ , et en notant  $\mathcal{I}_n$  l'ensemble associé à  $\beta$  défini par (10), on obtient les propriétés suivantes, semblables à celles du lemme 8 :

**Lemme 10** Avec les notations précédentes, si pour tout  $j \in \{0, \dots, m\}$ ,  $(b_n^{(j)} q_n \alpha_n)$  est une suite positive convergeant vers 0 et si  $(b'_n q_n \alpha_n)$  converge vers 0, alors toutes les propriétés sont équivalentes :

- (i)  $\|1 - \Theta_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,
- (ii) Pour toute suite d'intervalles  $(J_n)_n$  de longueur  $\alpha_{n-1}$ , on a

$$\frac{1}{\lambda(J_n)} \int_{J_n} (1 - \Theta_n) d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

- (iii)  $\sum_{0 \leq j \leq m} s_j b_n^{(j)} + b'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , et  $\exists x_n \in B'_n, \Theta_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ ,
- (iv)  $\|(1 - \Theta_n) \mathbf{1}_{\mathcal{I}_n^c}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

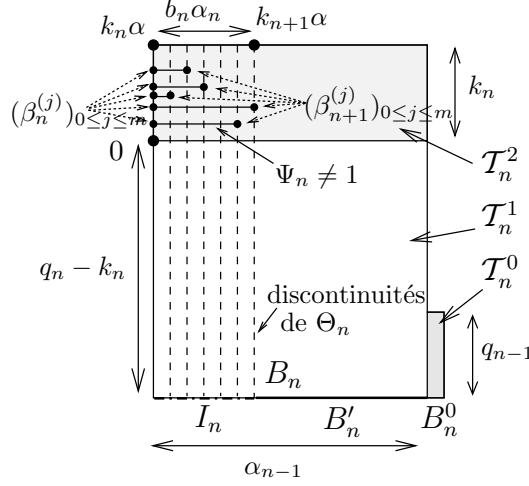
Preuve : On a  $(iv) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii)$  pour les mêmes raisons que dans le lemme 8 ( $\lambda(\mathcal{I}_n^c) = b_n \alpha_n q_n \rightarrow 0$  et  $\lambda(\Psi_n \neq 1) \leq m b_n \alpha_n$ ).

Pour montrer  $(ii) \Rightarrow (iii)$ , on calcule encore l'intégrale de  $\Theta_n$  sur  $B'_n$  (cf figure 10). Comme les discontinuités de  $\Theta_n$  sont dans  $\mathcal{I}_n$ ,  $\tilde{\Theta}_n$  est affine de pente constante  $(\sum_{j=0}^m s_j b_n^{(j)} + b'_n) q_n$  sur  $B'_n$  : on obtient  $(iii)$  par un calcul identique au lemme 8.

Pour montrer que  $(iii)$  entraîne  $(iv)$ , on vérifie d'abord que la convergence est uniforme sur les bases  $B'_n$  et  $B_n^0$  (base de la tour mineure) : comme pour le lemme 8 c'est une conséquence de la continuité de  $\Theta_n$  sur l'intervalle  $B'_n \cup B_n^0$  et de  $(iii)$ . Ensuite, on obtient par itération de l'égalité (18) que pour tout  $0 \leq k < q_n$

$$\frac{\Theta_n \circ T^k}{\Theta_n} = \exp \left( 2i\pi \sum_{j=0}^m s_j b_n^{(j)} + b'_n \right) k < q_n \alpha > \Psi_n^{(k)}.$$

Fig. 10 – Distribution de  $\Theta_n$  dans  $\mathcal{D}_n(\beta)$  ( $n$  pair).



Lorsque  $0 \leq k < q_n$ , on sait par (iii) que le terme constant converge vers 1 uniformément par rapport à  $k$ . De plus  $\Psi_n$  vaut 1 sur  $\mathcal{I}_n^c = \cup_{j < q_n} T^j B'_n \cup \cup_{j < q_{n-1}} T^j B_n^0$ , donc  $\Psi_n^{(k)} = 1$  sur  $B'_n \cup B_n^0$  pour  $0 \leq k < q_{n-1}$  et sur  $B'_n$  si  $0 \leq k < q_n$ . Par conséquent la convergence de  $\Theta_n$  vers 1 sur  $T^k B'_n$  est bien uniforme pour  $0 \leq k < q_n$ , de même que sur  $T^k B_n^0$  si  $0 \leq k < q_{n-1}$ .  $\square$

On établit comme dans la partie précédente une estimation de la corrélation entre  $F_n$  et  $\Theta_n$  sur  $\mathcal{F}_n$ , la tribu engendrée par les étages de  $\mathcal{D}_n(\beta)$ . On note  $(B_n)$  la suite des bases des tours majeures associées à  $\mathcal{D}_n(\beta)$  (cf 2.3.2). On obtient la proposition suivante :

**Proposition 6** On reprend les notations précédentes. On suppose que pour tout  $j$ ,  $(b_n^{(j)} q_n \alpha_n)$  et  $(b'_n q_n \alpha_n)$  convergent vers 0 (tous les  $b_n^{(j)}$  sont positifs). Si  $(\Theta_n)$  converge vers 1 dans  $L^2$ , alors on peut trouver une suite  $(\varepsilon_n)$  qui converge vers 0 telle que pour tout  $n \in \Lambda$  et pour toute fonction  $g$   $\mathcal{F}_n$ -mesurable de module inférieur à 1 on ait :

$$\int_{\mathbb{T}} g F_{n+1} d\lambda = \int_{\mathbb{T}} g F_n d\lambda \left( \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \Theta_n d\lambda \right) + \mathcal{O}_1(V_{B_n}(F_n) + \varepsilon_n(b_n \alpha_n q_n + k_n \alpha_{n-1})).$$

En notant  $\Lambda = \{n_j, j \geq 1\}$  on a aussi pour tout  $j \geq 1$

$$V_{B_{n_j}}(F_{n_j}) = o(b_{n_{j-1}} \alpha_{n_{j-1}} q_{n_{j-1}}) \quad \text{et} \quad k_{n_j} \alpha_{n_{j-1}} = \mathcal{O}_1(2b_{n_{j-1}} \alpha_{n_{j-1}} q_{n_{j-1}}).$$

*Preuve :* Pour  $n \in \Lambda$ , on découpe le domaine  $\mathcal{D}_n(\beta)$  en trois tours : la tour mineure d'ordre  $n$ , et deux tours de même largeur  $\alpha_{n-1}$  et de hauteur  $q_n - k_n$  et  $k_n$ , qui forment la tour majeure d'ordre  $n$ . On définit alors  $\mathcal{T}_n^0 = \cup_{0 \leq j < q_{n-1}} T^j B_n^0$ ,  $\mathcal{T}_n^1 = \cup_{0 \leq j < q_n - k_n} T^j B_n$  et  $\mathcal{T}_n^2 = \cup_{q_n - k_n \leq j < q_n} T^j B_n$  (voir figure 10). Sur  $\mathcal{T}_n^1$ , on sait que  $\Psi_n = 1$  et que  $g$  est constante sur les étages de la tour correspondante.

L'égalité (17) permet d'utiliser (14), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}_n^1} F_{n+1} g d\lambda &= \int_{\mathcal{T}_n^1} F_n g d\lambda \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \Theta_n d\lambda \\ &\quad + \lambda(\mathcal{T}_n^1) \mathcal{O}_1(V_{B_n}(f_n) + \frac{2\pi |\sum_0^m s_j b_n^{(j)} + b'_n| \alpha_n}{\alpha_{n-1}}). \end{aligned}$$

Sur  $\mathcal{T}_n^0$ , on a la même égalité que pour la proposition 3 :

$$\int_{\mathcal{T}_n^0} g F_{n+1} d\lambda = \int_{\mathcal{T}_n^0} g F_n d\lambda \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \Theta_n d\lambda + \lambda(\mathcal{T}_n^0) \mathcal{O}_1(2\|(1 - \Theta_n) \mathbf{1}_{\mathcal{T}_n^0 \cup B_n}\|_\infty).$$

Si l'on décompose  $\mathcal{T}_n^2$  selon  $\mathcal{I}_n$ , on obtient 2 sous-tours de même hauteur,  $\mathcal{T}_n^2 \cap \mathcal{I}_n$  et  $\mathcal{T}_n^2 \cap \mathcal{I}_n^c$  : la première est de mesure  $k_n b_n \alpha_n$ . Sur la seconde tour qui est incluse dans  $\mathcal{I}_n^c$ , on a la même égalité que sur  $\mathcal{T}_n^0$  : on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}_n^2} F_{n+1} g d\lambda &= \int_{\mathcal{T}_n^2} F_n g d\lambda \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \Theta_n d\lambda \\ &\quad + \mathcal{O}_1(2b_n k_n \alpha_n + \lambda(\mathcal{T}_n^2)(2\|(1 - \Theta_n) \mathbf{1}_{\mathcal{I}_n^c}\|_\infty)). \end{aligned}$$

Notons de façon analogue à la proposition 3,

$$\varepsilon_n = 2\|(1 - \Theta_n) \mathbf{1}_{\mathcal{I}_n^c}\|_\infty + 2\pi \left| \sum_0^m s_j b_n^{(j)} + b'_n \right| + 2k_n/q_n.$$

Cette suite converge bien vers 0, en raison des hypothèses et du lemme 10. En remarquant que  $\mathcal{T}_n^0 \subset \mathcal{I}_n^c$  et que lorsque  $n \in \Lambda$  on a  $\lambda(\mathcal{T}_n^0) \leq \alpha_n q_n \leq b_n \alpha_n q_n$ , la somme des égalités précédentes donne bien

$$\int_{\mathbb{T}} F_{n+1} g d\lambda = \int_{\mathbb{T}} F_n g d\lambda \frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \Theta_n d\lambda + \mathcal{O}_1(V_{B_n}(f_n) + \varepsilon_n(b_n \alpha_n q_n + k_n \alpha_{n-1})).$$

En ce qui concerne la seconde partie de la proposition, on sait que  $\tilde{F}_n$  est continue et de pente constante sur  $B_n$ , et sa variation sur  $B_n$  est donc majorée par  $\alpha_{n-1} |\sum_{0 \leq j \leq m} s_j k_n^{(j)} + k'_n|$ . Notons  $n = n_i$  le  $i$ -ième indice de  $\Lambda$ , par le même calcul que dans la proposition 3, on trouve que  $V_{B_{n_i}}(f_{n_i}) = o(b_{n_{i-1}} q_{n_{i-1}} \alpha_{n_{i-1}})$ . Enfin on a aussi  $k_{n_i} = b_{n_{i-1}} q_{n_{j-1}} + k_{n_{j-1}}$  : comme  $k_n < q_n$  et que  $\alpha_{n_{j-1}} \leq \alpha_{n_{j-1}}$  on obtient bien l'égalité proposée.  $\square$

On applique maintenant cette proposition à une fonction  $g$ ,  $\mathcal{F}_N$ -mesurable, vérifiant  $\int_{\mathbb{T}} F_n g d\lambda \neq 0$  pour tout  $n \geq N$  (ce qui est toujours possible en raison de la convergence forte de  $(F_n)$  vers  $F$  de module 1, et de la convergence des  $(\mathcal{F}_n)_n$  vers la tribu borélienne). On obtient donc que pour tout  $i$  assez grand :

$$\int_{\mathbb{T}} g F_{n_{i+1}} d\lambda = \int_{\mathbb{T}} g F_{n_i} d\lambda \left( \frac{1}{\lambda(B_{n_i})} \int_{B_{n_i}} \Theta_{n_i} d\lambda + o(b_{n_{i-1}} \alpha_{n_{i-1}} q_{n_{i-1}} + b_{n_i} \alpha_{n_i} q_{n_i}) \right).$$

Par conséquent, on doit avoir qu'un produit du type

$$\prod_{i > i_0} \left| \frac{1}{\lambda(B_{n_i})} \int_{B_{n_i}} \Theta_{n_i} d\lambda + o(b_{n_{i-1}} \alpha_{n_{i-1}} q_{n_{i-1}} + b_{n_i} \alpha_{n_i} q_{n_i}) \right| > 0.$$

Pour terminer la preuve du théorème 2, il reste à estimer  $1 - |\frac{1}{\lambda(B_n)} \int_{B_n} \Theta_n d\lambda + o(b_{n-1}\alpha_{n-1}q_{n-1} + b_n\alpha_n q_n)|$  lorsque  $n \in \Lambda$ . Les conditions du théorème 2 découlent directement du résultat suivant :

**Lemme 11** On reprend les notations précédentes, et on suppose que tous les  $b_n^{(j)}$  sont positifs, que  $(b_n\alpha_n q_n)_n$  et  $(\sum_0^m s_j b_n^{(j)} + b'_n)_n$  convergent vers 0. On a alors pour tout  $n \in \Lambda$  l'égalité :

$$1 - \frac{1}{\lambda(B_n)} \left| \int_{B_n} \Theta_n d\lambda \right| = \left( \sum_0^m s_j b_n^{(j)} + b'_n \right)^2 \left( \frac{\pi^2}{6} + o(1) \right) + b_n\alpha_n q_n \left( 1 + \mathcal{O}_1 \left( \frac{1}{\lambda(I_n)} \int_{I_n} \Theta_n d\lambda \right) + o(1) \right).$$

Sous l'hypothèse (H), on a en plus l'inégalité suivante : Il existe une constante  $C < 1$  strictement positive telle que pour tout  $n$  assez grand dans  $\Lambda$ , on ait

$$\left| \int_{I_n} \Theta_n d\lambda \right| \leq C\lambda(I_n).$$

Preuve : Soit  $n \in \Lambda$ . On décompose  $B_n$  en deux sous-intervalles  $B_n = I_n \cup B'_n$  comme précédemment (cf figure 10). Pour montrer la première partie du lemme, on écrit

$$\left| \int_{B_n} \Theta_n d\lambda \right| = \left| \int_{B'_n} \Theta_n d\lambda \right| + \mathcal{O}_1 \left( \int_{I_n} \Theta_n d\lambda \right).$$

Il suffit donc d'évaluer  $|\int_{B'_n} \Theta_n d\lambda|$  : Sur  $B'_n$ ,  $\tilde{\Theta}_n$  est continue, affine et de pente constante égale à  $(\sum_0^m s_j b_n^{(j)} + b'_n)q_n$ . En notant  $\alpha'_n = \lambda(B'_n)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \left| \int_{B'_n} \Theta_n d\lambda \right| &= \int_{-\alpha'_n/2}^{\alpha'_n/2} e^{2i\pi(\sum_0^m s_j b_n^{(j)} + b'_n)q_n x} dx \\ &= (\lambda(B_n) - \lambda(I_n)) \left( 1 - \frac{\pi^2}{6} \left( \sum_0^m s_j b_n^{(j)} + b'_n \right)^2 (q_n \alpha'_n)^2 (1 + o(1)) \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, comme  $(\alpha'_n q_n)$  converge vers 1 et  $\lambda(I_n) = b_n\alpha_n$  on trouve bien la première relation annoncée. Il reste pour terminer à démontrer la seconde partie du lemme :

Notons  $2\varepsilon = \min\{\|\sum_J s_j\|, J \neq \emptyset, J \neq \{0, \dots, m\}\}$ . D'après l'hypothèse (H), on a  $\varepsilon > 0$ . Pour  $n \in \Lambda$  (par exemple pair), on note  $B_n = [x_n, x_n + \alpha_{n-1}[$  et  $I_n = [x_n, x_n + b_n\alpha_n[$ . Les discontinuités de  $\Theta_n$  dans  $B_n$  sont de la forme  $x_n + k\alpha_n$  avec  $0 < k \leq b_n$  (car lorsque  $n \in \Lambda$  on a  $\min_j(b_n^{(j)}) = 1$ ). Dans ce cas, on sait aussi que  $b_n \geq 2$ , et qu'en chaque point de la forme  $x_n + k\alpha_n$  de  $I_n$ ,  $\theta_n$  admet un saut de taille  $\sum_{j=0}^m s_j \mathbf{1}_{b_n^{(j)} \geq k} = \gamma_{n,k}$  qui vérifie  $\|\gamma_{n,k}\| \geq 2\varepsilon$  pour tout  $1 < k \leq b_n$  (pour  $k = 1$  il n'y a pas de saut car tous les  $b_n^{(j)}$  sont supérieurs à 1).

D'autre part, on peut supposer que pour tout  $n$  assez grand on a  $b_n \geq 3$  : en effet, sinon on aurait  $b_n = 2$  infiniment souvent. Mais  $(\sum_0^m b_n^{(j)} s_j - b'_n)_n$  converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Or si  $b_n = 2$ , on a pour tout  $j \in \{0, \dots, m\}$   $b_n^{(j)} \in \{1, 2\}$ , donc pour un  $n$  assez grand on doit avoir  $\sum_j b_n^{(j)} s_j \in \mathbb{Z}$ . Comme

$\sum_j s_j = 0$  on a encore  $\sum_j (b_n^{(j)} - 1)s_j \in \mathbb{Z}$ . Notons  $J = \{j \in \{0, \dots, m\}, b_n^{(j)} = 2\}$ , on obtient donc  $\sum_{j \in J} s_j \in \mathbb{Z}$  ce qui est impossible car  $J$  n'est ni vide ( $b_n = \max_j (b_n^{(j)}) = 2$ ), ni  $\{0, \dots, m\}$  tout entier (car  $\min_j (b_n^{(j)}) = 1$ ). On peut décomposer maintenant l'intégrale sur  $I_n$  de la façon suivante :

$$\left| \int_{I_n} \Theta_n d\lambda \right| \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b_n-1}{2} \rfloor} \left| \int_{x_n+(2k-1)\alpha_n}^{x_n+(2k+1)\alpha_n} \Theta_n d\lambda \right| + \alpha_n (b_n - 2 \lfloor \frac{b_n-1}{2} \rfloor).$$

Sur les intervalles  $[x_n + (2k-1)\alpha_n, x_n + (2k+1)\alpha_n]$ ,  $\tilde{\Theta}_n$  est affine par morceaux de pente constante égale à  $(\sum_j s_j b_n^{(j)} + b'_n)q_n$ , avec un saut de taille  $\gamma_{n,2k}$  au milieu de l'intervalle. Par conséquent on peut écrire

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_n+(2k-1)\alpha_n}^{x_n+(2k+1)\alpha_n} \Theta_n d\lambda \right| &= \left| \int_{x_n+(2k-1)\alpha_n}^{x_n+2k\alpha_n} \Theta_n d\lambda (1 + e^{2i\pi(\gamma_{n,2k} + (\sum_j s_j b_n^{(j)} + b'_n)q_n\alpha_n)}) \right| \\ &\leq 2\alpha_n \left| \cos \left( \pi(\gamma_{n,2k} + (\sum_j s_j b_n^{(j)} + b'_n)q_n\alpha_n) \right) \right|. \end{aligned}$$

Or on sait que  $(q_n\alpha_n(\sum_j b_n^{(j)}s_j + b'_n))_n$  converge vers 0 et que  $\|\gamma_{n,2k}\| \geq 2\varepsilon$ . Donc pour tout  $n$  assez grand on a  $\|(q_n\alpha_n(\sum_j b_n^{(j)}s_j + b'_n) + \gamma_{n,2k})\| \geq \varepsilon$ , d'où il vient

$$\begin{aligned} \left| \int_{I_n} \Theta_n d\lambda \right| &\leq \alpha_n \left( b_n - 2 \lfloor \frac{b_n-1}{2} \rfloor (1 - \cos \pi\varepsilon) \right) \\ &\leq \lambda(I_n) \left( 1 - (1 - \cos \pi\varepsilon)(1 - \frac{1}{b_n}) \right) \\ &\leq \lambda(I_n) \cos^2(\pi\varepsilon/2). \end{aligned}$$

□

## 4.2 Réciproque

On établit dans ce paragraphe la preuve de la première partie du théorème 2, toujours selon le schéma de la partie précédente.

Ecrivons  $\phi = \sum_0^m s_j \phi_{\beta_j}$ , et supposons que  $\phi$  vérifie les hypothèses suivantes : pour une partition  $\mathcal{P}$ , on a pour tout  $J$  de  $\mathcal{P}$  et pour tout  $j_0 \in J$  les propriétés du théorème 2. Alors en notant  $\phi_J = \sum_{j \in J} s_j \phi_{\beta_j}$ , on a  $\phi = \sum_{J \in \mathcal{P}} \phi_J$ . Pour montrer que  $\phi$  est cohomologue à  $t$ , il suffit donc de démontrer que pour tout  $J$ ,  $\phi_J$  est cohomologue à  $t_J$  (car  $t = \sum_J t_J + k'\alpha$ ). Par conséquent, on peut se ramener au cas où  $\mathcal{P}$  est triviale, c'est à dire qu'on a les hypothèses suivantes : on peut écrire  $\phi = \sum_0^m s_j \phi_{\beta_j}$  où  $(s_j)_j$  sont des réels de somme nulle et  $(\beta_j)_j$  sont des réels distincts se décomposant sous la forme  $\beta_j = \sum_0^\infty b_n^{(j)} q_n \alpha \pmod{1}$ , avec  $(b_n^{(j)})$  des suites d'entiers vérifiant :

$$\forall j \in \{0, \dots, m\} \quad \sum_n \frac{|b_n^{(j)}|}{a_{n+1}} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_n \left\| \sum_{j=0}^m b_n^{(j)} s_j \right\|^2 < \infty.$$

Quitte à traduire  $\phi$  par une constante, on peut encore supposer que tous les  $(b_n^{(j)})$  sont positifs et que si  $\Lambda = \{n, \max_j (|b_n^{(j)}|) > 0\}$ , on a, selon le paragraphe 4.1.2,

$$n \in \Lambda \iff \left( \min_j (b_n^{(j)}) = 1 \text{ et } \max_j (b_n^{(j)}) \geq 2 \right).$$

On pose alors, toujours d'après 4.1.2,  $b_n = \max_j (b_n^{(j)})$  et  $\beta = \sum b_n q_n \alpha$ , et on considérera les domaines fondamentaux associés à  $\beta$ ,  $(\mathcal{D}_n(\beta))$ , la filtration  $(\mathcal{F}_n)$  associée, ainsi que toutes les quantités liées.

Notons pour tout  $n$ ,  $b'_n = -[\sum_0^m s_j b_n^{(j)}]$ , on a alors  $t = \sum_n b'_n q_n \alpha$ . On construit comme dans le chapitre précédent une fonction  $F$  qui vérifie (17). Pour cela on appelle  $\Theta_n$  l'unique solution de l'équation (18) qui vaut 1 sur le milieu de  $B'_n$ , puis on démontre que la suite de fonctions  $F_n = \prod_{k < n} \Theta_k$  admet une valeur d'adhérence non nulle pour la topologie faible  $L^2$ . La preuve, complètement analogue à celle du chapitre précédent, est laissée au lecteur.

## Troisième partie

# Constructions de facteurs discrets pour des flots spéciaux et des échanges de 3 intervalles.

Dans cette partie nous démontrons les théorèmes 3 et 5 à l'aide des conditions du théorème 1. Le dernier chapitre est consacré au résultat de régularisation (proposition 10) qui permet de prouver les parties des théorèmes 3 et 4 concernant les exemples de flot spéciaux avec fonctions plafond régulières.

## 5 Généralités, Tours de Kakutani.

Nous rappelons ici les liens existants entre les échanges de 3 intervalles et les flots spéciaux, notamment par l'intermédiaire des tours de Kakutani au dessus d'une rotation irrationnelle. Nous précisons ensuite comment s'appliquera le théorème 1 dans les chapitres suivants. Dans ce qui suit  $\alpha$  est un irrationnel dont la suite des quotients partiels  $(a_n)$  est non bornée. On note toujours  $T$  la translation de  $\alpha$  sur  $\mathbb{T}$  et  $(q_n)$  la suite des dénominateurs des réduites de  $\alpha$ .

### 5.1 Valeurs propres et fonctions propres des différentes transformations.

#### 5.1.1 Flots spéciaux.

On rappelle que le flot spécial,  $\tau_{\alpha,\phi}$  au dessus de  $T$  et de fonction plafond  $\phi$  est défini sur le domaine quotient  $D_\phi = \mathbb{T} \times \mathbb{R} / \sim$ , pour la relation d'équivalence  $(x, y + \phi(x)) \sim (Tx, y)$ , par  $\tau_{\alpha,\phi}^t(x, y) = (x, y + t)$ . Les valeurs propres de  $\tau_{\alpha,\phi}$  constituent le sous-groupe de  $\mathbb{R}$  défini par :

$$e(\tau_{\alpha,\phi}) = \{t \in \mathbb{R}, \exists f \in L^2(\mathbb{T}) \setminus \{0\} \quad e^{2i\pi t\phi} f = f \circ T\}.$$

Si  $t$  est une valeur propre du flot, les fonctions propres associées à  $t$  sont de la forme  $F_t(x, y) = f(x)e^{2i\pi ty}$ , où  $f$  est une fonction de transfert dans l'équation de cohomologie associée.

Pour  $\beta, \gamma$  réels  $> 0$  tels que  $\gamma\{\beta\} < 1$ , on note  $\tau_{\alpha,\beta,\gamma}$  le flot spécial de fonction plafond  $\phi = 1 + \gamma\phi_\beta$ . Dans ce cas  $t$  est une valeur propre lorsqu'il existe une solution  $f$  à l'équation (3) avec  $s = -t\gamma$ . Le théorème 1 s'applique donc lorsque  $s \notin \mathbb{Z}$  avec cette condition supplémentaire.

#### 5.1.2 Échanges de 3 intervalles.

On rappelle qu'un échange de 3 intervalles est identifié à l'induit  $T_{\alpha,\beta}$  de  $T$  sur  $[0, \beta[$  avec  $\beta \in ]0, 1[$ . Son groupe des valeurs propres est

$$e(T_{\alpha,\beta}) = \{s \in \mathbb{T}, \exists f \in L^2(\mathbb{T}) \setminus \{0\} \quad e^{2i\pi s} \mathbf{1}_{[0,\beta[} f = f \circ T\}.$$

$s$  est donc une valeur propre de  $T_{\alpha,\beta}$  lorsque l'équation (3) admet une solution avec  $t = -s\beta$ , et le théorème 1 s'applique donc dans ce cas. Les fonctions

propres associées à  $s$ ,  $f_\beta$ , sont les restrictions à  $[0, \beta[$  des fonctions de transfert  $f$  de l'équation (3).

### 5.1.3 Tours de Kakutani

On appelle (voir par exemple [22]) tour de Kakutani au dessus de  $T$  et de fonction hauteur  $h$ , où  $h$  est une fonction intégrable sur  $\mathbb{T}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , le système dynamique  $(X, T_h)$  où  $X = \{(x, k) \in \mathbb{T} \times \mathbb{Z}, 0 \leq k < h(x)\}$  et  $T_h$  est définie pour tout  $(x, k) \in X$  par :

$$T_h(x, k) = \begin{cases} (x, k+1) & \text{si } k+1 < h(x) \\ (Tx, 0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On munit  $X$  de la probabilité invariante  $\lambda_h$  égale à la mesure de Lebesgue renormalisée. Son groupe des valeurs propres est :

$$e(T_h) = \{s \in \mathbb{T}, \exists f \in L^2(\mathbb{T}) \setminus \{0\}, e^{i2\pi sh} f = f \circ T\}.$$

Si  $s$  est une valeur propre de  $T_h$ , les fonctions propres  $F$  associées s'écrivent pour tout  $(x, k) \in X$ ,  $F(x, k) = f(x)e^{2i\pi sk}$ , où  $f$  est une fonction de transfert de l'équation associée.

Pour tout  $\beta > 1$  donné, on notera  $(X_\beta, T_{\alpha, \beta})$ , la tour de Kakutani au dessus de  $T$  et de fonction hauteur  $h = \lfloor \beta \rfloor + \mathbf{1}_{[0, \{\beta\}[}$ . Lorsque  $\beta \in ]0, 1[$ , l'induit de la rotation sur  $[0, \beta[$  peut s'interpréter comme la tour de "hauteur"  $\mathbf{1}_{[0, \beta[}$  correspondant à la généralisation naturelle au cas où  $h$  prend des valeurs nulles. On notera  $\lambda_\beta$  la probabilité invariante associée.

Lorsque  $\beta > 1$  et  $\gamma^{-1} = \beta$ , le flot  $\tau_{\alpha, \beta, \gamma}$  est, à homothétie de temps près, la suspension de la tour  $T_{\alpha, \beta}$  (la suspension est le flot spécial de fonction plafond égale à  $h/\|h\|_1$ ). Si  $\tilde{e}(T_{\alpha, \beta})$  désigne le relevé dans  $\mathbb{R}$  de  $e(T_{\alpha, \beta})$ , on obtient simplement

$$e(\tau_{\alpha, \beta, \beta^{-1}}) = \beta \tilde{e}(T_{\alpha, \beta}).$$

Pour montrer les parties (ii) et (iii) du théorème 3 ainsi que le théorème 4, il suffira d'étudier la tour de Kakutani  $T_{\alpha, \beta}$  associée au flot : les résultats montrant la conjugaison de  $T_{\alpha, \beta}$  à  $R_s$  ou à un odomètre, entraînent la conjugaison de  $\tau_{\alpha, \beta, \beta^{-1}}$  au flot de translations obtenu par suspension, et renormalisé par  $\beta^{-1}$ ,  $R_{s\beta, \beta}$ , ou à un flot de translations sur un solénoïde (voir paragraphe 7.2).

## 5.2 Les conditions (\*).

D'après ce qui vient d'être dit, nous obtiendrons des valeurs propres  $s$  ou  $t$  pour les transformations présentées, en construisant des triplets  $(\beta, s, t)$  pour lesquels l'équation (3) admet des solutions, avec de plus  $t = -s\beta$  ou  $s = -t\gamma$  selon les cas.

### 5.2.1 Définition.

On dira que le triplet  $(\beta, s, t)$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifie (\*) s'il existe des suites d'entiers  $(b_n)$  et  $(b'_n)$  et des entiers  $k_1, k'_1, l_1$  et  $l'_1$  tels qu'on ait :

$$(*) \quad \begin{cases} \beta = k_1\alpha - l_1 + \sum_1^\infty b_n \langle q_n \alpha \rangle \\ t = k'_1\alpha - l'_1 + \sum_1^\infty b'_n \langle q_n \alpha \rangle \\ \sum_1^\infty |b_n|/a_{n+1} < \infty \quad \text{et} \\ \sum_1^\infty (b_n s - b'_n)^2 < \infty. \end{cases}$$



L'avant-dernière condition peut également s'écrire :  $\sum_1^\infty b_n q_n \|q_n \alpha\| < \infty$ . Nous utiliserons selon les besoins, l'une ou l'autre des deux formes. Autrement dit,  $\beta \in H_1(\alpha)$ , avec la définition donnée dans l'introduction.

D'après le théorème 1, lorsque  $s \notin \mathbb{Z}$ , le triplet  $(\beta, s, t)$  vérifie (\*) si et seulement si l'équation (3) associée au triplet  $(\beta, -s, t)$  admet une solution.

Lorsque  $s \in \mathbb{Z}$  (pour le flot), comme  $t(1 + \gamma\phi_\beta) = t - s\beta = s(\gamma^{-1} - \beta) \bmod 1$ , l'équation se réduit à l'équation aux valeurs propres de  $T$ . On trouve donc des solutions lorsque  $(\gamma^{-1} - \beta) \in \mathbb{Q} + \alpha\mathbb{Q}$ , et ces valeurs propres sont les multiples de  $d\gamma^{-1}$  où  $d = \min\{k \in \mathbb{N}^*, k(\gamma^{-1} - \beta) \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}\}$ .

Lorsque  $\beta \notin H_1(\alpha)$ , les seules valeurs propres sont ces valeurs propres "triviales".

Lorsque  $\beta \in H_1(\alpha)$ , comme les solutions triviales vérifient  $t - s\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  elles sont incluses dans les solutions données par (\*) et on obtient donc :

$$\begin{aligned} e(\tau_{\alpha, \beta, \gamma}) &= \{t \in \mathbb{R}, (\beta, \gamma t, t) \text{ vérifie } (*)\}, \\ \tilde{e}(T_{\alpha, \beta}) &= \{s \in \mathbb{R}, (\beta, s, s\beta) \text{ vérifie } (*)\}. \end{aligned}$$

En définitive, les constructions de valeurs propres non triviales se réduisent à la construction de triplets  $(\beta, s, t)$  vérifiant (\*), où  $t = s\beta$  pour l'induit  $(T_{\alpha, \beta}$  avec  $\beta \in ]0, 1[)$  et  $s = t\gamma$  pour le flot  $(\tau_{\alpha, \beta, \gamma})$ .

### 5.2.2 Notations et ordres de grandeurs.

Pour construire des solutions à (\*), on cherchera des  $\beta \in H_1(\alpha)$  déterminés par des suites  $(b_n)$  très lacunaires, c'est à dire que les  $b_n$  seront nuls sauf le long d'une sous-suite qu'on notera  $(n_j)$ . Par commodité, on notera encore  $(b_j)$  la sous-suite des termes non nuls. On écrit alors

$$\beta = k_1 \alpha - l_1 + \sum_{j \geq 1} b_j \langle q_{n_j} \alpha \rangle,$$

et on définit les suites  $(\beta_j)$ ,  $(k_j)$  et  $(l_j)$  par

$$k_{j+1} = k_j + b_j q_{n_j}, \quad l_{j+1} = l_j + b_j p_{n_j} \quad \text{et} \quad \beta_j = k_j \alpha - l_j = \beta_1 + \sum_{i=1}^{j-1} b_i \langle q_{n_i} \alpha \rangle.$$

Enfin on imposera  $|b_j|/a_{n_j+1} \leq \varepsilon_j$ , où  $(\varepsilon_j)$  est une suite sommable strictement positive donnée. Lorsque  $(\beta, s, t)$  vérifie (\*), on peut toujours, quitte à modifier le premier terme, écrire  $t$  sous la forme analogue

$$t = k'_1 \alpha - l'_1 + \sum_{j \geq 1} b'_j \langle q_{n_j} \alpha \rangle,$$

où  $k'_1, l'_1$  et les  $b'_j$  sont des entiers, et on notera également  $t_j = k'_1 \alpha - l'_1 + \sum_{1 \leq i < j} b'_i q_{n_i} \alpha = k'_j \alpha - l'_j$  pour  $j \geq 1$ .

Le lemme suivant précise alors la vitesse de convergence des sommes partielles  $\beta_j$  ainsi que l'ordre de grandeur de  $k_j$  et  $l_j$ .

**Lemme 12** Soit  $\beta$  dans  $H_1(\alpha)$ . Avec les notations précédentes, si  $M = 1 + \sum_{j \geq 2} \varepsilon_j$  et  $C = (1 + \max(|k_1|, |l_1|)) \prod_{i \geq 1} (1 + \varepsilon_i)$ , on a les inégalités

$$\begin{aligned} |\beta - \beta_j| &\leq M \alpha_{n_{j-1}} \varepsilon_j \quad \text{pour tout } j \geq 1, \\ \max(|k_j|, |l_j|) &\leq C b_{j-1} q_{n_{j-1}} \quad \text{pour tout } j \geq 2. \end{aligned}$$

Si de plus  $\beta \notin \mathbb{Z}$  et que le triplet  $(\beta, s, t)$  vérifie  $(*)$  avec  $t = s\beta$ , en posant  $s_j = t_j/\beta_j$  on a aussi  $(s - s_j) = o(\alpha_{n_j})$ .

Preuve : Pour tout  $j \geq 1$  on a

$$|\beta - \beta_j| \leq \sum_j^\infty |b_i| \alpha_{n_i} \leq \sum_j^\infty a_{n_i+1} \alpha_{n_i} \varepsilon_i \leq \alpha_{n_j-1} \varepsilon_j + \alpha_{n_j} \sum_{j+1}^\infty \varepsilon_i.$$

Comme  $b_j \neq 0$ , on a  $1 \leq a_{n_j+1} \varepsilon_j$ , d'où  $\alpha_{n_j} < \alpha_{n_j-1} \varepsilon_j$  et on obtient bien  $|\beta - \beta_j| \leq M \alpha_{n_j-1} \varepsilon_j$ .

En ce qui concerne la majoration de  $|k_j|$ , il suffit de montrer par récurrence que pour tout  $j \geq 2$  on a  $|k_j| \leq C_j |b_{j-1}| q_{n_{j-1}}$  avec

$$C_j = (|k_1| + 1) \prod_{i=1}^{j-2} (1 + \varepsilon_i).$$

On a bien  $|k_2| = |k_1 + b_1 q_{n_1}| \leq C_1 |b_1| q_{n_1}$ . Supposons que pour  $j \geq 2$ , on ait  $|k_j| \leq C_j |b_{j-1}| q_{n_{j-1}}$ . Alors

$$|k_j| \leq C_j \varepsilon_{j-1} a_{n_{j-1}+1} q_{n_{j-1}} < C_j \varepsilon_{j-1} q_{n_j}$$

et il vient

$$\begin{aligned} |k_{j+1}| &\leq |k_j| + |b_j| q_{n_j} \leq C_j \varepsilon_{j-1} q_{n_j} + |b_j| q_{n_j} \\ &\leq (C_j \varepsilon_{j-1} + 1) |b_j| q_{n_j} \leq C_{j+1} |b_j| q_{n_j}. \end{aligned}$$

On obtient donc l'inégalité annoncée pour  $|k_j|$ . La majoration est analogue pour  $|l_j|$ .

Supposons maintenant que  $(\beta, s, t)$  vérifie  $(*)$ . Comme  $\beta \notin \mathbb{Z}$ , alors  $s_j = t_j/\beta_j$  est bien défini pour  $j$  assez grand et si  $\varepsilon'_j = b_j s - b'_j$  on peut écrire

$$\beta_j(s - s_j) = \beta_j s - t_j = s(\beta_j - \beta) + (t - t_j) = \sum_{i \geq j} \varepsilon'_i \langle \alpha q_{n_i} \rangle.$$

En remarquant que pour tout  $j$ ,  $\sum_{i \geq j} \alpha_{n_i}^2 \leq 2\alpha_{n_j}^2$ , on obtient en notant  $M' = \sum_1^\infty \varepsilon'_j{}^2$  :

$$\begin{aligned} |s - s_j| &\leq \frac{1}{|\beta_j|} \left( \alpha_{n_j} |\varepsilon'_j| + \alpha_{n_{j+1}} \sqrt{2M'} \right) \\ &\leq \frac{\alpha_{n_j}}{|\beta_j|} \left( |\varepsilon'_j| + \varepsilon_{j+1} \sqrt{2M'} \right). \end{aligned}$$

□

## 6 Groupe de valeurs propres de rang infini.

Nous démontrons dans ce chapitre le théorème suivant :

**Théorème 6** Pour tout irrationnel  $\alpha$  à quotients partiels non bornés et pour tout  $\gamma > 0$ , on peut construire un ensemble de  $\beta$  non dénombrable et dense dans  $]0, 1/\gamma[$  pour lesquels le flot spécial  $\tau_{\alpha, \beta, \gamma}$  admet comme facteur discret un flot

de translations ergodique sur un tore de dimension infinie.

De même, pour tout irrationnel  $\alpha$  à quotients partiels non bornés, on peut construire un ensemble de  $\beta$  non dénombrable et dense dans  $\mathbb{R}^+$  pour lesquels  $T_{\alpha,\beta}$  admet un groupe de valeurs propres de rang infini.

Le premier paragraphe fournit une construction de solutions non triviales à (\*) dans les cas de  $\tau_{\alpha,\beta,\gamma}$  ou de  $T_{\alpha,\beta}$ , qui servira de base pour la suite.

Le second paragraphe montre comment on peut, à l'aide de cette construction, obtenir plusieurs valeurs propres rationnellement indépendantes : nous traiterons d'abord le cas de  $T_{\alpha,\beta}$ , puis celui de  $\tau_{\alpha,\beta,\gamma}$  en précisant à chaque étape quelles sont les différences.

Enfin nous expliquerons dans le troisième paragraphe comment utiliser ce qui précède pour construire des systèmes admettant une infinité de valeurs propres rationnellement indépendantes, ce qui achèvera la preuve du théorème 6.

Dans tout ce chapitre, on suppose donné  $\alpha$ , un irrationnel à quotients partiels non bornés. On suppose aussi donnée une suite  $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$  positive strictement décroissante et sommable, avec  $\sum_{j \geq 1} \varepsilon_j \leq 1/2$ .

## 6.1 Première construction de valeurs propres non triviales.

On construit ici des solutions  $(\beta, s, t)$  à (\*), avec  $t = s\beta$  pour l'induit ou la tour  $T_{\alpha,\beta}$  ou  $s = t\gamma$  pour le flot  $\tau_{\alpha,\beta,\gamma}$ . On se donne aussi une suite  $(\varepsilon'_j)$  strictement positive de carré sommable. On part de deux entiers non nuls  $k_1$  et  $k'_1$  et de deux entiers quelconques  $l_1$  et  $l'_1$ .

Nous construisons par récurrence les suites  $(b_j)$  et  $(b'_j)$  d'entiers non nuls et la suite  $(n_j)$  strictement croissante définissant  $\beta$  et  $t$ . Les suites  $(k_j)$ ,  $(k'_j)$ ,  $(\beta_j)$ ,  $(t_j)$  introduites au paragraphe 5.2.2 sont alors définies simultanément pour  $j \geq 1$ . On notera aussi  $s_j = t_j/\beta_j$  dans le cas de  $T_{\alpha,\beta}$  ( $\beta_j$  sera non nul) ou  $s_j = t_j\gamma$  dans le cas de  $\tau_{\alpha,\beta,\gamma}$ , pour tout  $j \geq 1$ .

Soit  $j \geq 1$ . Supposons avoir construit  $(b_i)_{i < j}$ ,  $(b'_i)_{i < j}$  et  $(n_i)_{i < j}$ , et supposons que  $\beta_j = k_1\alpha - l_1 + \sum_{1 \leq i < j} b_i < q_{n_i}\alpha > \neq 0$  donc que  $s_j$  est bien défini. On choisit alors  $b_j$  puis  $b'_j$  de sorte que

$$\|b_j s_j\| < \varepsilon'_j \quad \text{et} \quad b'_j = [b_j s_j]. \quad (19)$$

et on choisit ensuite  $n_j > n_{j-1}$  tel que

$$q_{n_j} \geq \max(|b_j|, |b'_j|), \quad (20)$$

et

$$\frac{\max(|b_j|, |b'_j|)}{a_{n_j+1}} < \varepsilon_j. \quad (21)$$

Pour  $j = 1$ , on demande de plus  $n_1 > 1$  et

$$q_{n_1} > \max(|k_1|, |k'_1|). \quad (22)$$

Pour  $j = 1$ , on a bien  $\beta_1 = k_1\alpha - l_1 \neq 0$  puisque  $k_1 \neq 0$  et d'après la dernière condition  $\|\beta_1\| = \|k_1\alpha\| \geq \alpha_{n_1-1}$ . Pour  $j > 1$ , si (21) est satisfaite pour  $i < j$  on a de même que dans la preuve du lemme 12,

$$|\beta_j - \beta_1| < \sum_{1 \leq i < j} a_{n_i+1} \alpha_{n_i} \varepsilon_i < \alpha_{n_1-1} \sum_{1 \leq i < j} \varepsilon_i \leq \frac{\alpha_{n_1-1}}{2}, \quad (23)$$

d'où  $\beta_j \neq 0$  et on peut continuer la construction.

Dans la suite, on sera amené à faire cette construction avec (19) et (20) satisfaites à partir d'un certain rang seulement. On obtient les propriétés suivantes :

**Proposition 7** Si la condition (22) est satisfaite et que (21) est satisfaite pour tout  $j \geq 1$ , les suites  $(\beta_j)$ ,  $(t_j)$  et  $(s_j)$  convergent respectivement vers trois réels  $\beta$ ,  $t$  non entiers et  $s \neq 0$ , avec  $s = t\gamma$  pour le cas de  $\tau_{\alpha,\beta,\gamma}$  ou  $t = s\beta$  pour le cas de  $T_{\alpha,\beta}$ .

D'autre part il existe un réel  $M(t_1, n_1)$  qui ne dépend que de  $t_1$  et  $n_1$  tel que pour tout  $j \geq 1$ ,  $|s_j| \leq M(t_1, n_1)$ . Pour tout  $j \geq 2$ ,  $k_j$  et  $k'_j$  sont non nuls et vérifient

$$\max(|k_j|, |k'_j|) < 2\varepsilon_{j-1}q_{n_j}. \quad (24)$$

Si de plus les conditions (19) et (20) sont vérifiées pour tout  $j$  assez grand, alors le triplet  $(\beta, s, t)$  obtenu satisfait (\*). L'ensemble des limites  $\beta$  obtenues dans ce cas est non dénombrable et dense dans  $\mathbb{R}^+$ .

Preuve : Il est clair d'après (21) que la suite  $(\beta_j)$  converge et que sa limite  $\beta$  appartient à  $H_1(\alpha)$ . Pour tout  $j \geq 1$ , d'après (23), on a  $\|\beta_j\| \geq \|\beta_1\| - |\beta_j - \beta_1| \geq \alpha_{n_1-1}/2$  donc  $k_j$  est non nul. On obtient encore  $\|\beta\| \geq \alpha_{n_1-1}/2$  donc  $\beta \notin \mathbb{Z}$ .

La suite  $(t_j)$  converge vers  $t$  pour les mêmes raisons que  $(\beta_j)$  et on a les mêmes inégalités : pour tout  $j \geq 1$ ,  $|t_j - t_1| \leq \alpha_{n_1-1}/2$  et  $\|t_j\| \geq \alpha_{n_1-1}/2$ , d'où  $k'_j \neq 0$  et  $t \notin \mathbb{Z}$ .

Donc  $(s_j)$  converge aussi vers une limite  $s = t/\beta$  (pour  $T_{\alpha,\beta}$ ) ou  $s = t\gamma$  (pour  $\tau_{\alpha,\beta,\gamma}$ ) et dans les deux cas  $s \neq 0$ . Comme  $|t_j| \leq |t_1| + \alpha_{n_1-1}/2$  et que  $|\beta_j| \geq \alpha_{n_1-1}/2$  pour tout  $j \geq 1$ , la suite  $(s_j)$  est bien majorée par une constante  $M(t_1, n_1)$  qui ne dépend que de  $t_1$  et  $n_1$ .

L'inégalité (24) se démontre par récurrence, de façon identique pour les suites  $(k_j)$  et  $(k'_j)$ . Pour  $j \geq 1$ , si l'on suppose seulement que  $|k_j| < q_{n_j}$ , ce qui est vrai par hypothèse pour  $j = 1$ , il suffit d'écrire :

$$|k_{j+1}| = |k_j + b_j q_{n_j}| \leq q_{n_j}(1 + a_{n_j+1}\varepsilon_j) < 2q_{n_j}a_{n_j+1}\varepsilon_j < 2\varepsilon_j q_{n_{j+1}}$$

car  $b_j \neq 0$  et  $|b_j| < a_{n_j+1}\varepsilon_j$  donne  $a_{n_j+1}\varepsilon_j > 1$ .

Supposons maintenant que (19) et (20) soient satisfaites pour tout  $j$  assez grand. Pour montrer que  $(\beta, s, t)$  satisfait (\*) il suffit de vérifier que la suite  $((b'_j - b_j s))$  est de carré sommable et, comme  $(b'_j - b_j s_j)$  est de carré sommable d'après (19), il suffit de montrer que  $(b_j(s - s_j))$  l'est également.

D'après (21) et le lemme 12, on a  $|\beta - \beta_j| \leq M\alpha_{n_j-1}\varepsilon_j$  et de même  $|t - t_j| \leq M\alpha_{n_j-1}\varepsilon_j$  pour tout  $j \geq 1$ , avec  $M = 3/2$ . Pour le flot  $\tau_{\alpha,\beta,\gamma}$  on a donc pour  $j$  assez grand

$$|b_j(s - s_j)| \leq \gamma q_{n_j}|t - t_j| \leq M\gamma q_{n_j}\alpha_{n_j-1}\varepsilon_j < M\gamma\varepsilon_j,$$

donc la suite est sommable.

Pour  $T_{\alpha,\beta}$  la majoration est semblable :

$$\begin{aligned} |b_j(s - s_j)| &= \frac{|b_j|}{|\beta_j|} |s(\beta_j - \beta) + (t - t_j)| \\ &\leq \frac{2M}{\alpha_{n_1-1}} (|s| + 1) q_{n_j}\alpha_{n_j-1}\varepsilon_j < \frac{2M}{\alpha_{n_1-1}} (|s| + 1) \varepsilon_j. \end{aligned}$$

Enfin l'ensemble des  $\beta$  obtenu ainsi est dense : en effet l'ensemble des  $\beta_1 = k_1\alpha - l_1$  possibles est dense, et  $|\beta - \beta_1| \leq \alpha_{n_1-1}/2$  peut être rendu arbitrairement petit par le choix de  $n_1$ . Cet ensemble aussi non dénombrable : d'après le lemme 1, l'unicité de la décomposition en série de  $\beta$  à partir de l'indice  $j$  est assurée dès que  $|k_j| < q_{n_j}/2$  et  $|b_i| < a_{n_i+1}/4$  pour tout  $i \geq j$ . Ces 2 conditions sont vérifiées grâce à (21) et (24) dès que  $\varepsilon_{j-1} < 1/4$ . Comme à chaque étape il y a une infinité de choix pour  $b_j$  et  $n_j$ , l'ensemble des sommes obtenues est bien non dénombrable.  $\square$

## 6.2 Construction avec $r$ valeurs propres rationnellement indépendantes.

Soit  $r$  un entier  $\geq 2$ . On va construire selon le schéma précédent,  $\beta$  et  $r$  réels  $t^1, \dots, t^r$  de sorte que  $T_{\alpha, \beta}$  ou  $\tau_{\alpha, \beta, \gamma}$  admette  $r$  valeurs propres indépendantes. Ces valeurs propres seront, pour  $T_{\alpha, \beta}$ , les  $s^i = t^i/\beta$  pour  $i \in \{1, \dots, r\}$  : on veut qu'elles soient rationnellement indépendantes dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , ce qui revient à construire  $\beta, t^1, \dots, t^r$  rationnellement indépendants. Pour  $\tau_{\alpha, \beta, \gamma}$ , les valeurs propres seront  $t^1, \dots, t^r$  : il suffit donc a priori de construire  $t^1, \dots, t^r$  rationnellement indépendants. On posera pour la suite, par commodité,  $t^0 = \beta$ .

On suppose toujours donnée la suite  $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$  strictement positive décroissante et sommable, avec  $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \leq 1/2$ . Nous prenons les notations suivantes :

- $\vec{k}_1 \in \mathbb{Z}^{*r+1}$  et  $\vec{l}_1 \in \mathbb{Z}^{r+1}$ .
- $(\vec{b}_j)_{j \geq 1}$  est une suite dans  $\mathbb{Z}^{*r+1}$
- $(n_j)_{j \geq 1}$  est une suite d'entiers positifs strictement croissante.

Alors les suites  $(\vec{k}_j)_{j \geq 1}$  et  $(\vec{t}_j)_{j \geq 1}$  sont définies pour tout  $j \geq 1$  par

$$\vec{k}_{j+1} = \vec{k}_j + q_{n_j} \vec{b}_j, \quad \text{et} \quad \vec{t}_j = \alpha \vec{k}_1 - \vec{l}_1 + \sum_{i=1}^{j-1} \langle q_{n_i} \alpha \rangle \vec{b}_i.$$

On note  $\vec{k}_j = (k_j^i)_{0 \leq i \leq r}$ ,  $\vec{b}_j = (b_j^i)_{0 \leq i \leq r}$  et de même pour les autres vecteurs. On sera aussi amené à travailler dans  $\mathbb{R}^r$ , avec les éléments de  $\mathbb{R}^{r+1}$  privés de leur première coordonnée. Nous noterons, sauf ambiguïté, pour tout  $\vec{x} = (x^0, \dots, x^r)$  de  $\mathbb{R}^{r+1}$ ,  $x$  le vecteur  $(x^1, \dots, x^r)$  de  $\mathbb{R}^r$ .

Enfin,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $\|\cdot\|_2$  désignent le produit scalaire et la norme euclidienne usuels, indifféremment dans  $\mathbb{R}^{r+1}$  ou  $\mathbb{R}^r$ .

Les vecteurs  $\vec{k}_1$  et  $\vec{l}_1$  étant donnés, on choisira les  $\vec{b}_j$  et  $n_j$  de façon que (22) et (21) soient satisfaites pour tout couple  $(b_j^0, b_j^i)$  avec  $1 \leq i \leq r$ , c'est-à-dire

$$\max_i (|k_1^i|) < q_{n_1} \quad \text{et} \quad \max_i (|b_j^i|) \leq \varepsilon_j a_{n_j+1} \quad \text{pour tout } j \geq 1.$$

Alors la première partie de la proposition 7 s'applique et en particulier la suite  $(\vec{t}_j)$  converge vers un vecteur  $\vec{t}$ .

Pour tout  $j \geq 1$ , on aura comme précédemment  $\beta_j = t_j^0 \neq 0$  et on pose  $\vec{s}_j = (t_j^0)^{-1} \vec{t}_j$  dans le cas de  $T_{\alpha, \beta}$ , ou  $\vec{s}_j = \gamma \vec{t}_j$  dans le cas de  $\tau_{\alpha, \beta, \gamma}$ . On demandera ensuite que (20) et (20) soient satisfaites pour les couples  $(b_j^0, b_j^i)$  pour  $1 \leq i \leq r$ , à partir d'un certain rang et avec une suite  $(\varepsilon'_j)$  à préciser.

### 6.2.1 Critères d'indépendance.

Nous précisons d'abord comment obtenir l'indépendance algébrique des valeurs propres ainsi construites. Nous donnons les énoncés pour le cas de  $T_{\alpha,\beta}$ .

**Lemme 13** Avec les notations et les hypothèses ci-dessus, si pour tout  $j$  assez grand, la famille  $(\overrightarrow{t_{j-r}}, \dots, \overrightarrow{t_j})$  est libre dans  $\mathbb{R}^{r+1}$ , alors les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{t} = \lim \overrightarrow{t_j}$  sont rationnellement indépendantes.

Preuve : Supposons qu'il existe  $\overrightarrow{v} = (v_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{Z}^{r+1} \setminus 0$  tel que  $\sum_0^r v_i t^i = 0$ . On obtient alors que pour tout  $j$ ,

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{t_j} \rangle + \sum_j^\infty \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{b_m} \rangle \langle q_{n_m} \alpha \rangle = 0.$$

On a  $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{t_j} \rangle = (\sum_i v_i k_j^i) \alpha \pmod 1$ . L'inégalité (24) s'applique à tous les  $k_j^i$ , ce qui donne  $|\sum_i v_i k_j^i| \leq 2\varepsilon_{j-1} q_{n_j} \sum_i |v_i|$  pour tout  $j \geq 2$ . Donc pour tout  $j$  assez grand pour que  $2\varepsilon_{j-1} \sum_i |v_i| < 1$ , on a  $|\sum_i v_i k_j^i| < q_{n_j}$  et si cette somme n'est pas nulle  $\|(\sum_i v_i k_j^i) \alpha\| \geq \alpha_{n_j-1}$ .

D'autre part, pour tout  $j \geq 1$ , comme  $\max_i(|b_j^i|) \leq \varepsilon_j a_{n_j+1}$ ,

$$|\sum_{m \geq j} \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{b_m} \rangle \langle q_{n_m} \alpha \rangle| \leq \sum_i |v_i| \sum_{j \geq m} \varepsilon_m a_{n_m+1} \alpha_{n_m} \leq M \sum_i |v_i| \alpha_{n_j-1} \varepsilon_j,$$

selon le lemme 12, avec  $M = 3/2$ . Il en résulte que  $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{t_j} \rangle = 0$  pour tout  $j$  assez grand. Alors la famille  $(\overrightarrow{t_j}, \dots, \overrightarrow{t_{j+r}})$  admet un orthogonal non trivial ce qui est contraire à l'hypothèse.  $\square$

Nous utiliserons ce résultat pour la construction de  $(\overrightarrow{t_j})$  par l'intermédiaire du lemme suivant, qui s'applique lorsque la condition (19) est vérifiée.

**Lemme 14** Soit  $j > r$ . On suppose que la famille  $(\overrightarrow{t_{j-r}}, \dots, \overrightarrow{t_j})$  est libre dans  $\mathbb{R}^{r+1}$  et que, pour un vecteur  $\overrightarrow{u}$  orthogonal à  $(\overrightarrow{t_{j-r+1}}, \dots, \overrightarrow{t_j})$ , on a

$$\sum_{i=1}^r u_i \langle b_j^0 s_j^i \rangle \neq 0, \quad \text{et} \quad b_j^i = [b_j^0 s_j^i] \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, r\}.$$

alors la famille  $(\overrightarrow{t_{j-r+1}}, \dots, \overrightarrow{t_{j+1}})$  est libre.

Preuve : D'après l'hypothèse l'orthogonal de la famille  $(\overrightarrow{t_{j-r+1}}, \dots, \overrightarrow{t_j})$  est de dimension 1, et est donc engendré par le vecteur  $\overrightarrow{u}$ . Pour que la famille  $(\overrightarrow{t_{j+1-r}}, \dots, \overrightarrow{t_{j+1}})$  soit libre, il suffit que  $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{t_{j+1}} \rangle \neq 0$ . Comme  $\overrightarrow{t_{j+1}} = \overrightarrow{t_j} + \langle q_{n_j} \alpha \rangle \overrightarrow{b_j}$  et  $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{t_j} \rangle = 0$  par hypothèse, Il suffit que  $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{b_j} \rangle \neq 0$ .

Or  $b_j^i = [b_j^0 s_j^i] = b_j^0 s_j^i - \langle b_j^0 s_j^i \rangle$  pour tout  $i$ . Comme  $\overrightarrow{s_j} = (t_j^0)^{-1} \overrightarrow{t_j}$ ,  $b_j^0 s_j^0 = b_j^0 \in \mathbb{Z}$  et on a encore  $\langle b_j^0 \overrightarrow{s_j}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$ . Il en résulte que  $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{b_j} \rangle = -\sum_0^r u_i \langle b_j^0 s_j^i \rangle = -\sum_1^r u_i \langle b_j^0 s_j^i \rangle \neq 0$ .  $\square$

Dans le cas des flots  $\tau_{\alpha,\beta,\gamma}$ , ces lemmes sont encore valides à condition de les adapter dans  $\mathbb{R}^r$  en supprimant la première coordonnée, et en remplaçant  $r$  par  $r-1$  pour les familles de vecteurs.

### 6.2.2 Construction pour $T_{\alpha,\beta}$ .

Nous procédons maintenant à la construction pour le cas des induits ou des tours  $T_{\alpha,\beta}$ .

**Proposition 8** Soient  $\vec{k}_1 \in \mathbb{Z}^{*r+1}$ ,  $\vec{l}_1 \in \mathbb{Z}$  et  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $\max_{0 \leq i \leq r} |k_1^i| < q_{n_1}$  et  $J_r$  un entier supérieur à  $r$ . Alors il existe une constante  $C_r > 0$  ne dépendant que de  $\vec{k}_1$  et  $n_1$  telle que pour toute suite  $(\varepsilon'_j)$  vérifiant  $\varepsilon'_j \geq C_r \varepsilon_{j-r-1}$  pour tout  $j > J_r$ , on peut construire une suite  $(\vec{b}_j)$  dans  $\mathbb{Z}^{*r+1}$  et une suite strictement croissante  $(n_j)$  dans  $\mathbb{N}$  satisfaisant les propriétés suivantes.

- (i) La famille  $(\vec{t}_{J_r-r+1}, \dots, \vec{t}_{J_r+1})$  est libre.
- (ii) Pour tout  $j \geq 1$ ,  $\max_{0 \leq i \leq r} |b_j^i| < \min(\varepsilon_j a_{n_j+1}, q_{n_j})$ .
- (iii) Pour tout  $j > J_r$ ,  $\max_{0 \leq i \leq r} \|b_j^0 s_j^i\| \leq \varepsilon'_j$ ,

il existe  $\vec{u}$  orthogonal à  $\{\vec{t}_{J_r-r+1}, \dots, \vec{t}_j\}$  tel que  $\sum_{i=1}^r u_i \langle b_j^0 s_j^i \rangle \neq 0$

et  $b_j^i = [b_j^0 s_j^i]$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

Alors la suite  $(\vec{t}_j)$  ainsi construite converge vers un vecteur  $(t^0, t^1, \dots, t^r)$  de coordonnées rationnellement indépendantes. Lorsque  $\sum_{j \geq 1} \varepsilon'_j{}^2 < +\infty$  tous les triplets  $(t^0, t^i/t^0, t^i)$  sont solutions de  $(*)$ , et l'ensemble des limites  $t^0$  ainsi obtenues est non dénombrable et dense.

Preuve : La seconde partie de la proposition résulte clairement des lemmes 13 et 14 et de la proposition 7. Soient  $J_r \geq r$  et  $(\varepsilon'_j)$  vérifiant l'hypothèse de l'énoncé, la constante  $C_r$  restant à choisir. Il suffit de démontrer l'existence des suites  $(\vec{b}_j)$ ,  $(n_j)$  ou, de façon équivalente, d'une suite  $(\vec{t}_j)$  vérifiant (i), (ii) et (iii).

On commence par se donner  $(\vec{t}_j)_{j \leq J_r-r+1}$  de sorte que (ii) soit vérifiée pour  $j \leq J_r - r$ ; ensuite on choisit  $(\vec{b}_{J_r-r+1}, \dots, \vec{b}_{J_r})$  tels que  $(\vec{t}_{J_r-r+1}, \vec{b}_{J_r-r+1}, \dots, \vec{b}_{J_r})$  soit libre dans  $\mathbb{R}^{r+1}$ . Comme  $\vec{t}_{j+1} = \vec{t}_j + \langle q_{n_j} \alpha \rangle \vec{b}_j$ , on obtient ainsi la condition (i). Enfin on choisit  $(n_j)_{j \leq J_r}$  de sorte qu'on ait (ii) pour  $j \leq J_r$ .

Soit maintenant  $J > J_r$ . Supposons avoir construit  $\vec{b}_j$  et  $n_j$  vérifiant les conditions (ii) et (iii) jusqu'au rang  $J-1$ , c'est à dire qu'on a défini  $(\vec{t}_j)_{j \leq J}$ . Pour construire  $\vec{t}_{J+1}$ , il suffit de trouver  $b_J^0$  satisfaisant les premières conditions de (iii), de définir  $\vec{b}_J$  par la dernière condition de (iii), puis de choisir  $n_J$  de sorte que (ii) soit vraie au rang  $J$ . Il reste donc à montrer l'existence de  $b_J^0$ .

Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul orthogonal à  $\{\vec{t}_{J-r+1}, \dots, \vec{t}_J\}$ . Comme  $k_j^0 \neq 0$  d'après la proposition 7,  $u = (u_i)_{i \geq 1}$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^r$  qu'on peut choisir de sorte que  $\|u\|_2 = 1$ . Notons  $x_i = \langle b_J^0 s_J^i \rangle$ , alors les premières conditions de (iii) s'écrivent :

$$\max_{1 \leq i \leq r} |x_i| < \varepsilon'_J \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r u_i x_i \neq 0.$$

Par densité pour montrer l'existence de  $b_J^0$ , il suffit de montrer que le relevé dans  $\mathbb{R}^r$  du groupe fermé engendré dans  $\mathbb{T}^r$  par  $s_J = (s_J^1, \dots, s_J^r)$ , noté  $G$ , est  $(\varepsilon'_J/3)$ -dense dans  $\mathbb{R}^r$  pour la norme euclidienne. En effet, dans ce cas, on peut

choisir  $x \in G$  tel que  $\|x - \frac{\varepsilon'_J}{2}u\|_2 \leq \varepsilon'_J/3$ . Alors  $\|x\|_2 < \varepsilon'_J$  et

$$|\langle x, u \rangle| \geq \varepsilon'_J/2 - \|x - \frac{\varepsilon'_J}{2}u\|_2 \geq \varepsilon'_J/6.$$

Soit  $R = \{v \in \mathbb{Z}^r : \langle v, s_J \rangle \in \mathbb{Z}\}$ , alors  $G = \{x \in \mathbb{R}^r : \langle v, x \rangle \in \mathbb{Z}, \forall v \in R\}$  par dualité des groupes localement compacts, autrement dit  $G$  est l'annihilateur de  $R$  dans  $\mathbb{R}^r$ . La densité relative de  $G$ , avec une constante de la forme  $C_r \varepsilon_{J-r-1}/3$ , résulte des 2 lemmes suivants.  $\square$

**Lemme 15** On reprend les notations et les hypothèses de la proposition 8 et on suppose que (i), (ii) et (iii) sont vérifiées pour  $j < J$ . Notons  $M_r = \max_i (M(t_1^i, n_1)) + 1$  où  $M(t_1^i, n_1)$  est défini selon la proposition 7. Alors pour tout  $v \in R \setminus \{0\}$  on a  $\|v\|_2 \geq 1/(2M_r \sqrt{r} \varepsilon_{J-r-1})$ .

Preuve : Soit  $v \in R \setminus \{0\}$ . Alors il existe un entier  $v_0$  vérifiant  $\sum_{i=0}^r v_i s_J^i = 0$  ( $s_J^0 = 1$ ). Comme pour tout  $i \in \{0, \dots, r\}$  on a  $s_J^i = t_J^i/t_J^0$  il vient  $\sum_{i=0}^r v_i t_J^i = 0$ . Or, avec les hypothèses, le lemme 14 montre que la famille  $(\overrightarrow{t_{J-r}}, \dots, \overrightarrow{t_J})$  est libre, donc il existe un entier  $m$  entre  $J-r$  et  $J-1$  tel que  $\sum_{i=0}^r v_i t_m^i \neq 0$  mais  $\sum_{i=0}^r v_i t_{m+1}^i = 0$ , c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^r v_i t_m^i = - \left( \sum_{i=0}^r v_i b_m^i \right) \langle q_{n_m} \alpha \rangle \neq 0.$$

Comme  $\sum_{i=0}^r v_i t_m^i = (\sum_{i=0}^r v_i k_m^i) \alpha \pmod{1}$ , on doit donc avoir pour un entier  $m \in \{J-r, \dots, J\}$  l'une des deux conditions suivantes (cf lemme 1).

$$q_{n_m} \leq \left| \sum_{i=0}^r v_i k_m^i \right| < 2 \sum_{i=0}^r |v_i| \varepsilon_{m-1} q_{n_m} \quad (\text{d'après (24)}),$$

$$\text{ou bien} \quad a_{n_m+1} < 2 \left| \sum_{i=0}^r v_i b_m^i \right| \leq 2 \sum_{i=0}^r |v_i| \varepsilon_m a_{n_m+1} \quad (\text{d'après (ii)}).$$

On obtient donc nécessairement  $\sum_0^r |v_i| \geq \frac{1}{2\varepsilon_{J-r-1}}$ . Enfin, comme  $v_0 + \sum_1^r v_i s_J^i = 0$  on a

$$|v_0| \leq (\max_i |s_J^i|) \sum_1^r |v_i| \text{ et par conséquent}$$

$$\|v\|_2 \geq \frac{1}{2M_r \sqrt{r} \varepsilon_{J-r-1}}.$$

$\square$

Le lemme qui suit est un résultat général sur la densité relative de l'annihilateur d'un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^r$ .

**Lemme 16** Pour tout  $r \geq 1$ , il existe une constante  $c_r$  telle que si  $R$  est un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^r$  et  $d = \min(\|v\|_2 : v \in R \setminus \{0\})$ , son annihilateur  $G$  est  $(c_r/d)$ -dense dans  $\mathbb{R}^r$ .

Preuve : Le résultat est évident pour  $r = 1$  avec  $c_r = 1/2$ . Soit  $r > 1$ , on suppose la propriété montrée pour  $r-1$ , avec la constante  $c_{r-1}$ . Soit  $a \in R$  avec  $|a| = d$  et soit  $H$  l'hyperplan orthogonal à  $a$ . Alors  $G' = G \cap H$  est l'annihilateur dans  $H$  de la projection orthogonale  $R'$  de  $R$  sur  $H$ . Comme  $R$  contient  $\mathbb{Z}a$ , il



ne contient pas d'autres points à distance inférieure à  $d\sqrt{3}/2$  de la droite  $\mathbb{R}a$ , donc les points de  $R'$  sont espacés d'au moins  $d\sqrt{3}/2$  et d'après l'hypothèse de récurrence  $G'$  est  $(2c_{r-1}/d\sqrt{3})$ -dense dans  $H$ .

D'autre part, on obtient une base de  $R$  sur  $\mathbb{Z}$  en ajoutant  $a$  au relevé d'une base de  $R'$ . Il en résulte qu'il existe  $x \in G$  avec  $\langle a, x \rangle = 1$ . Alors les hyperplans  $\langle a, x \rangle = b$  pour  $b \in \mathbb{Z}$ , qui sont distants de  $1/d$ , et chacun rencontre  $G$  selon un translaté de  $G'$  qui y est  $(2c_{r-1}/d\sqrt{3})$ -dense. Cela prouve le résultat avec  $c_r^2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{3}c_{r-1}^2$ .  $\square$

**Remarque :** Dans la preuve de la proposition 13, le groupe  $G$  admet donc la constante de densité relative  $2M_r\sqrt{r}c_r\varepsilon_{J-r-1}$  et il suffit de choisir  $C_r = 6M_r\sqrt{r}c_r$ .

### 6.2.3 Construction pour $\tau_{\alpha,\beta,\gamma}$ .

Nous reprenons dans ce paragraphe le schéma précédent, ainsi que ses notations. Ici  $\gamma$  est un réel fixé strictement positif. Nous devons distinguer les deux cas suivants.

**Cas**  $\gamma^{-1} \notin \mathbb{Q}\alpha + \mathbb{Q}$ .

On construit la suite  $(\vec{t}_j)$  de sorte que  $(t^1, \dots, t^r)$  soient rationnellement indépendants. Nous utilisons à nouveau les lemmes 13 et 14, en supprimant la première coordonnée. Les conditions de la proposition 8 deviennent :

- (i)  $(t_{J-r+1}, \dots, t_{J_r})$  libre dans  $\mathbb{R}^r$ ,
- (ii) Pour tout  $j \geq 1$ ,  $\max_{0 \leq i \leq r} |b_j^i| < \min(\varepsilon_j a_{n_j+1}, q_{n_j})$ .
- (iii) Pour tout  $j \geq J_r$ ,  $\max_{0 \leq i \leq r} \|b_j^0 s_j^i\| \leq \varepsilon'_j$ , il existe  $u$  orthogonal à  $\{t_{j-r+2}, \dots, t_j\}$

tel que  $\sum_{i=1}^r u_i \langle b_j^0 s_j^i \rangle \neq 0$  et  $b_j^i = [b_j^0 s_j^i]$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

La seule modification notable concerne la preuve du lemme 15. En effet, si  $v \in R$ , il existe  $v_0 \in \mathbb{Z}$  tel que  $\sum_{i=1}^r v_i s_j^i + v_0 = 0$ . Mais ici on a  $s_J = \gamma t_J$ , d'où la relation

$$\sum_{i=1}^r v_i t_J^i + v_0 \gamma^{-1} = 0. \quad (25)$$

Comme  $\gamma^{-1}$  n'est pas dans  $\alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ , on a nécessairement  $v_0 = 0$ , et le reste de la preuve du lemme est inchangé. On obtient dans ce cas une constante  $C_r$  qui ne dépend que de  $r$ .

**Cas**  $\gamma^{-1} \in \alpha\mathbb{Q} + \mathbb{Q}$ .

L'hypothèse de récurrence utilisée pour le lemme 15 sur la liberté de la famille  $(t_{J-r+2}, \dots, t_J)$  ne permet pas d'exploiter la relation (25) comme ci-dessus. Posons  $\gamma^{-1} = (k\alpha - l)/d$  où  $k, l$  et  $d$  sont premiers entre eux. Nous construisons dans ce cas la suite  $(\vec{t}_j)$  de sorte qu'en notant  $\vec{t}'_j = (k\alpha - l, t_j)$ , les familles  $(\vec{t}'_{j-r}, \dots, \vec{t}'_j)$  soient libres. On peut encore appliquer le lemme 13 pour  $(\vec{t}'_j)$ , à condition d'imposer  $q_{n_1} > |k|$ . On utilise alors le lemme 14 pour  $(\vec{t}'_j)$  en modifiant la condition sur le premier terme. L'énoncé devient alors :

**Lemme 14 modifié :** Soit  $j > r$ . On suppose que la famille  $(\vec{t}'_{j-r}, \dots, \vec{t}'_j)$  est

libre dans  $\mathbb{R}^{r+1}$ . Si pour un vecteur  $\vec{u}$  orthogonal à  $(\overrightarrow{t'_{j-r+1}}, \dots, \overrightarrow{t'_j})$  on a

$$\text{pour tout } i \in \{1, \dots, r\}, b_j^i = [b_j^0 s_j^i], \text{ et } \sum_{i=1}^r u_i \langle b_j^0 s_j^i \rangle + b_j^0 du_0 \neq 0,$$

alors la famille  $(\overrightarrow{t'_{j-r+1}}, \dots, \overrightarrow{t'_{j+1}})$  est libre.

Et la proposition 8 devient :

**Proposition 8 modifiée :** Soit  $\vec{k}_1 \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{r+1}$  et  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $q_{n_1} > |k|$  et  $\max_{0 \leq i \leq r} |k_1^i| < q_{n_1}$ . Alors il existe une constante  $C_r > 0$  telle que pour toute suite  $(\varepsilon'_j)$  vérifiant  $\varepsilon'_j \geq C_r \varepsilon_{j-r-1}$  pour tout  $j > J_r$ , on peut construire des suites  $(\vec{b}_j)$  et  $(n_j)$  satisfaisant les propriétés suivantes.

- (i) La famille  $(\overrightarrow{t'_{J_r-r+1}}, \dots, \overrightarrow{t'_{J_r+1}})$  est libre.
- (ii) Pour tout  $j \geq 1$ ,  $\max_{0 \leq i \leq r} |b_j^i| < \min(\varepsilon_j a_{n_j+1}, q_{n_j})$ .
- (iii) Pour tout  $j > J_r$ ,  $\max_{0 \leq i \leq r} \|b_j^0 s_j^i\| \leq \varepsilon'_j$ ,

il existe  $\vec{u}$  orthogonal à  $\{\overrightarrow{t'_{j-r+1}}, \dots, \overrightarrow{t'_j}\}$  tel que  $\sum_{i=1}^r u_i \langle b_j^0 s_j^i \rangle + u_0 db_j^0 \neq 0$   
et  $b_j^i = [b_j^0 s_j^i]$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

Preuve : On reprend les notations et le schéma de la preuve de la proposition 8 : on distingue encore 2 cas.

Soit  $u_0 = 0$  et la condition (iii) est alors inchangée. Dans ce cas la preuve est identique à celle de la proposition 8. Pour le lemme 15, de la relation  $\sum_0^r v_i s_j^i = 0$  on obtient l'équation (25) d'où il résulte que  $d$  divise  $v_0$ . En remplaçant  $v_0$  par  $v_0/d$ , on retrouve bien  $\sum_0^r v_i t_j^i = 0$  et le reste de la preuve est exactement le même.

Soit  $u_0 \neq 0$  et la preuve de la proposition est directe : il suffit de voir qu'il existe des entiers  $b$  arbitrairement grands vérifiant pour tout  $1 \leq i \leq r$ ,  $\|b s_j^i\| < \varepsilon'_j$ , car  $|\sum_1^r u_i \langle b s_j^i \rangle| < \sum_1^r |u_i|$  reste bornée contrairement à  $du_0 b$ .  $\square$

### 6.3 Une infinité de valeurs propres indépendantes.

Nous ne considérerons que le cas de  $T_{\alpha, \beta}$ . La construction pour  $\tau_{\alpha, \beta, \gamma}$  s'adapte sans difficulté.

Nous reprenons les notations du paragraphe précédent. Il s'agit de modifier la construction précédente de façon à obtenir une infinité de valeurs propres rationnellement indépendantes. C'est à dire qu'on va construire  $(t_j^i)_{\substack{i \geq 0 \\ j \geq 1}}$  telle que pour tout  $r \geq 1$ , la suite  $(t_j^0, \dots, t_j^r)_j$  vérifie les conditions de la proposition 8 pour un entier  $J_r > J_{r-1}$  choisi ci-après.

Supposons avoir construit une telle suite, d'après la proposition 8, la suite  $(\varepsilon'_j)$  vérifie alors pour tout  $r \geq 1$  et pour tout  $j \in \{J_r + 1, \dots, J_{r+1}\}$

$$\varepsilon'_j = C_r \varepsilon_{j-r-1}.$$

Par conséquent, pour que  $(\varepsilon'_j)$  soit de carré sommable, il est d'abord nécessaire que  $(C_r \varepsilon_{J_r-r})$  converge vers 0 : posons par exemple  $J_r = 2r$  pour tout  $r \geq 1$ , dans ce cas la suite  $(\varepsilon'_j)$  est de carré sommable dès que  $(C_r \varepsilon_r)$  l'est.

On suppose maintenant donnée une suite  $(\varepsilon_j)$  positive strictement décroissante telle que  $(c_r \sqrt{r} \varepsilon_r)$  soit de carré sommable ( $c_r$  est la constante du lemme 16). Il est immédiat de vérifier que dans ce cas  $(\varepsilon_j)$  est sommable. On choisit ensuite pour tout  $r \geq 1$  de poser  $J_r = 2r$ .

Soit  $r \geq 1$  fixé, supposons construite la suite  $(t_j^0, \dots, t_j^r)_{1 \leq j \leq J_{r+1}}$  selon le paragraphe précédent. Les conditions (i), (ii) et (iii) de la proposition 8 sont alors vérifiées pour tout  $j \leq J_{r+1}$  et  $i \leq r$ .

Pour passer à  $r+1$ , il suffit de construire  $(t_j^{r+1})_{1 \leq j \leq J_{r+1}+1}$  de sorte qu'on ait encore (ii) et (i) : on pourra ensuite continuer la construction selon le paragraphe précédent. On pose pour tout  $j \leq J_{r+1}$ ,  $t_j^{r+1} = t_j^r$  : ceci assure la condition (ii) pour  $j < J_{r+1}$ . On obtient également  $M_{r+1} = M_r = M$  indépendant de  $r$ , d'où  $C_r = 2M\sqrt{r}c_r$  (cf proposition 8). Ceci assure la convergence de la série  $((C_r \varepsilon_r)^2)_r$ , donc que  $\sum_j \varepsilon_j'^2 < \infty$ .

Pour vérifier (i), il reste à choisir  $b_{J_{r+1}}^{r+1}$  de sorte que la matrice

$$\begin{pmatrix} t_{J_{r+1}-r}^0 & \cdots & t_{J_{r+1}-r}^r & t_{J_{r+1}-r}^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{J_{r+1}}^0 & \cdots & t_{J_{r+1}}^r & t_{J_{r+1}}^{r+1} \\ t_{J_{r+1}+1}^0 & \cdots & t_{J_{r+1}+1}^r & t_{J_{r+1}+1}^{r+1} \end{pmatrix}$$

soit régulière. Or, par construction, le premier mineur d'ordre  $r$  est non nul, donc en développant le déterminant de la matrice par rapport à la dernière ligne on trouve que celui-ci s'annule pour au plus une seule valeur de  $t_{J_{r+1}+1}^{r+1}$ .

Comme  $t_{J_{r+1}+1}^{r+1} = t_{J_{r+1}}^{r+1} + b_{J_{r+1}}^{r+1} \langle q_{n_{J_{r+1}}} \alpha \rangle$ , ceci montre que l'une des deux valeurs  $b_{J_{r+1}}^{r+1} = \pm 1$  convient. La condition (ii) est alors automatiquement vérifiée pour  $J_{r+1}$ .

On obtient donc par récurrence la suite  $(t_j^i)_{i,j}$  voulue. Ceci clôt la preuve du théorème 6.

## 7 Constructions de flots speciaux et d'échanges de 3 intervalles à spectre purement discret.

Le but de ce chapitre est de donner les constructions des parties (ii) et (iii) des théorèmes 3 et 5, ainsi que leurs réciproques (théorème 4 et (iv) et (v) du théorème 5). Pour les flots spéciaux, nous restreindrons ici notre étude aux cas des flots  $\tau_{\alpha, \beta, \beta^{-1}}$ . D'après ce que nous avons fait remarquer au chapitre 5, il nous suffira donc de construire des tours de Kakutani  $T_{\alpha, \beta}$  à spectre discret. Nous donnons dans le premier paragraphe des constructions dans lesquelles on peut identifier le facteur Kronecker des tours de Kakutani obtenues. Dans les paragraphes suivants, nous montrons que pour certains cas de ces constructions,  $T_{\alpha, \beta}$  est isomorphe à son facteur de Kronecker.

### 7.1 Constructions avec facteur de Kronecker explicite.

Soit  $\alpha$  un irrationnel et  $\beta \in H_1(\alpha)$ . D'après le chapitre 5, le relevé dans  $\mathbb{R}$  du groupe des valeurs propres de  $T_{\alpha, \beta}$ ,  $\tilde{e}(T_{\alpha, \beta})$ , est l'ensemble de tous les réels  $s$  tels que  $(\beta, s, t)$  vérifie  $(*)$  avec  $t = s\beta$ . On obtient le résultat suivant :

**Théorème 7** Pour tout  $\alpha$  à quotients partiels non bornés, il existe un ensemble de  $\beta$  dense dans  $\mathbb{R}^+$  pour lesquels  $\tilde{e}(T_{\alpha,\beta})$  est isomorphe à la limite inductive d'une suite de groupes  $\mathbb{Z}^2$  par une suite de matrices  $(A_n)$  à coefficients entiers.

### 7.1.1 Analyse de la construction.

On reprend les notations du paragraphe 5.2.2 :

- $\alpha \notin \mathbb{Q}$  est donné, à quotients partiels non bornés.
- $(n_j)_{j \geq 1}$  est une suite d'entiers positifs strictement croissante,
- $(b_j)_{j \geq 1}$  et  $(b'_j)_{j \geq 1}$  sont deux suites d'entiers non nuls, et on suppose toujours que  $|b_j|/a_{n_j+1} = \mathcal{O}(\varepsilon_j)$ , où  $(\varepsilon_j)$  est une suite sommable.
- $k_1, k'_1$  sont deux entiers non nuls, et  $l_1$  et  $l'_1$  deux entiers quelconques.
- Les suites  $(k_j)_{j \geq 1}$ ,  $(k'_j)_{j \geq 1}$ ,  $(l_j)_{j \geq 1}$ ,  $(l'_j)_{j \geq 1}$ ,  $(\beta_j)_{j \geq 1}$ ,  $(t_j)_{j \geq 1}$  sont définies pour tout  $j \geq 1$  par

$$\begin{aligned} k_{j+1} &= k_j + b_j q_{n_j}, & l_{j+1} &= l_j + b_j p_{n_j}, & \beta_j &= k_j \alpha - l_j, \\ k'_{j+1} &= k'_j + b'_j q_{n_j}, & l'_{j+1} &= l'_j + b'_j p_{n_j}, & t_j &= k'_j \alpha - l'_j. \end{aligned}$$

On suppose aussi que  $b'_j = [b_j s] = [b_j t \beta^{-1}]$  pour tout  $j$  assez grand. Alors les suites  $(\beta_j)$  et  $(t_j)$  convergent et on note  $\beta = \lim \beta_j$ ,  $t = \lim t_j$ . Il s'agit de trouver des conditions sur les suites  $(b_j)$  et  $(n_j)$  permettant de caractériser les suites  $(b'_j)$  telles que  $(\beta, s, t)$  vérifie (\*) avec  $t = s\beta$ .

À l'aide des estimations du lemme 12, on peut écrire :

$$\begin{aligned} b_j s &= b_j t_j \beta^{-1} + b_j (s - t_j \beta^{-1}) \\ &= (k'_j \alpha - l'_j) b_j \beta^{-1} + \beta^{-1} b_j (t - t_j) \\ &= k'_j [b_j \beta^{-1} \alpha] - l'_j [b_j \beta^{-1}] + k'_j \langle b_j \beta^{-1} \alpha \rangle - l'_j \langle b_j \beta^{-1} \rangle + \mathcal{O}(b_j \alpha_{n_j-1} \varepsilon_j) \\ &= k'_j [b_j \beta^{-1} \alpha] - l'_j [b_j \beta^{-1}] + \mathcal{O}(b_{j-1} q_{n_{j-1}} (\|b_j \beta^{-1} \alpha\| + \|b_j \beta^{-1}\|)) \\ &\quad + \mathcal{O}(b_j \alpha_{n_j-1} \varepsilon_j). \end{aligned}$$

Supposons alors que  $(b_j)$  et  $(n_j)$  vérifient de plus :

$$|b_j| = \mathcal{O}(q_{n_j}) \quad \text{et} \quad q_{n_{j-1}} b_{j-1} \max(\|b_j \beta^{-1}\|, \|b_j \beta^{-1} \alpha\|) = \mathcal{O}(\varepsilon_j).$$

Dans ce cas, en posant  $d_j = [b_j \beta^{-1}]$  et  $c_j = [d_j \alpha]$ , on obtient pour  $j$  assez grand  $[b_j \beta^{-1} \alpha] = c_j$ , d'où

$$b_j s = k'_j c_j - l'_j d_j + \mathcal{O}(\varepsilon_j) \quad \text{et} \quad b'_j = k'_j c_j - l'_j d_j.$$

Ceci donne  $k'_{j+1} = k'_j + (k'_j c_j - l'_j d_j) q_{n_j}$  et  $l'_{j+1} = l'_j + (k'_j c_j - l'_j d_j) p_{n_j}$ .

Par conséquent les valeurs  $t$  telles que  $(\beta, s, t)$  vérifient (\*) sont des limites des suites  $(k'_j \alpha - l'_j)$  où les vecteurs  $\begin{pmatrix} k'_j \\ l'_j \end{pmatrix}$  satisfont pour tout  $j$  assez grand la récurrence :

$$\begin{pmatrix} k'_{j+1} \\ l'_{j+1} \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} k'_j \\ l'_j \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad A_j = \begin{pmatrix} 1 + c_j q_{n_j} & -d_j q_{n_j} \\ c_j p_{n_j} & 1 - d_j p_{n_j} \end{pmatrix}.$$

La valeur propre triviale  $s = 1$  de  $T_{\alpha,\beta}$  correspond à  $t = \beta$  et  $(\beta, 1, \beta)$  est une solution. Du coup  $\beta$  s'obtient également par la relation de récurrence ci-dessus. On pourra donc partir de la donnée des suites  $(d_j)$  et  $(n_j)$ .

Comme  $\|d_j \alpha\| = \|b_j \beta^{-1} \alpha - \langle b_j \beta^{-1} \rangle \alpha\| \leq \|b_j \beta^{-1} \alpha\| + \|b_j \beta^{-1}\|$ , ces suites doivent vérifier

$$d_j = \mathcal{O}(\max(q_{n_j}, \varepsilon_j a_{n_j+1})) \quad \text{et} \quad d_{j-1} q_{n_{j-1}} \|d_j \alpha\| = \mathcal{O}(\varepsilon_j).$$

### 7.1.2 Construction.

Il s'agit maintenant de montrer que les conditions précédentes sur  $(d_j)$  et  $(n_j)$  permettent de définir un ensemble de réels  $\beta$  pour lesquels le groupe des réels  $t$  tels que  $(\beta, t/\beta, t)$  vérifie  $(*)$  est isomorphe à la limite inductive de la suite des groupes  $\mathbb{Z}^2$  avec les matrices de transition  $(A_j)$ . On notera  $\lim_{\rightarrow}(\mathbb{Z}^2, A_j)$  cette limite, qu'on identifiera au groupe des suites  $(k_j, l_j)_n$  dans  $\mathbb{Z}^2$ , vérifiant pour tout  $j$  assez grand la relation  $\begin{pmatrix} k_{j+1} \\ l_{j+1} \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} k_j \\ l_j \end{pmatrix}$ , modulo les suites nulles à partir d'un certain rang.

On se donne  $(\varepsilon_j)$  une suite positive sommable strictement décroissante, avec  $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$ . On construit par récurrence deux suites d'entiers strictement croissantes,  $(d_j)$  et  $(n_j)$  de la façon suivante : on pose  $d_0 = q_0 = 1$  et  $n_0 = 0$ , puis pour tout  $j \geq 1$  on choisit  $d_j$  et  $n_j$  vérifiant

$$d_{j-1}q_{n_{j-1}}\|d_j\alpha\| \leq \varepsilon_j, \quad (26)$$

$$\min(q_{n_j}, \varepsilon_j a_{n_j+1}) \geq d_j. \quad (27)$$

On pose pour tout  $j \geq 1$ ,  $c_j = [d_j\alpha]$  puis

$$A_j = \begin{pmatrix} 1 + c_j q_{n_j} & -d_j q_{n_j} \\ c_j p_{n_j} & 1 - d_j p_{n_j} \end{pmatrix} \quad (28)$$

À tout couple d'entiers  $(k', l')$  et tout  $j_0 \geq 1$  et on associe les suites  $(k'_j)$ ,  $(l'_j)$  et  $(t_j)$  définies à partir de l'indice  $j_0$  par : pour tout  $j \geq j_0$ ,

$$\begin{pmatrix} k'_j \\ l'_j \end{pmatrix} = \prod_{i=j_0}^{j-1} A_i \begin{pmatrix} k' \\ l' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t_j = k'_j \alpha - l'_j.$$

On pose pour tout  $j \geq j_0$

$$b'_j = k'_j c_j - l'_j d_j$$

de sorte que  $k'_{j+1} = k'_j + b'_j q_{n_j}$ ,  $l'_{j+1} = l'_j + b'_j p_{n_j}$  et  $t'_{j+1} = t'_j + b'_j \langle q_{n_j} \alpha \rangle$  pour tout  $j \geq j_0$ .

On remarque qu'on a aussi

$$b'_j = k'_j [d_j \alpha] - l'_j d_j = d_j (k'_j \alpha - l'_j) - k'_j \langle d_j \alpha \rangle = d_j t_j - k'_j \langle d_j \alpha \rangle.$$

Le lemme suivant donne les ordres de grandeur ou vitesses de convergence des suites ainsi définies :

**Lemme 17** Pour tout couple  $(k', l')$  donné il existe une constante  $C'$  telle que, quel que soit  $j_0 \geq 1$ , pour tout  $j \geq j_0$

$$|t_j| \leq C' \quad \text{et} \quad \max(|k'_j|, |l'_j|) \leq 2C' d_{j-1} q_{n_{j-1}}.$$

La suite  $(t_j)_j$  converge vers un réel  $t \in H_1(\alpha)$ , et on a les inégalités suivantes pour tout  $j \geq j_0$  :

$$|b'_j| \leq 2C' d_j \quad \text{et} \quad |t - t_j| \leq 2C' \varepsilon_j \alpha_{n_j-1}.$$

Preuve : Pour tout  $j \geq 1$  on pose  $C_j = (|k'| + |l'|) \prod_{i < j} (1 + \varepsilon_i)$ , qui est majorée par une constante  $C'$  par hypothèse. Soit  $j_0 \geq 1$ , on montre par récurrence que pour tout  $j \geq j_0$ , on a

$$|t_j| \leq C_j \quad \text{et} \quad \max(|k'_j|, |l'_j|) \leq 2C_j d_{j-1} q_{n_{j-1}}.$$

Les inégalités sont vérifiées pour  $j = j_0$ . Supposons l'hypothèse vraie au rang  $j$ , on a alors :

$$t_{j+1} = t_j + b'_j \langle q_{n_j} \alpha \rangle = t_j (1 + d_j \langle q_{n_j} \alpha \rangle) - k'_j \langle d_j \alpha \rangle \langle q_{n_j} \alpha \rangle.$$

Avec l'hypothèse de récurrence et les inégalités (26) et (27) on obtient alors

$$|t_{j+1}| \leq C_j (1 + \varepsilon_j \alpha_{n_j} (a_{n_j+1} + 2)).$$

Comme  $q_{n_1} > 1$  par construction, on voit facilement que  $\alpha_{n_j} (a_{n_j+1} + 2) \leq 2\alpha_{n_j} + \alpha_{n_j-1} \leq 1$ , d'où  $|t_{j+1}| \leq C_{j+1}$ .

En ce qui concerne  $k'_j$  (et le raisonnement est identique pour  $l'_j$ ), on a :

$$k'_{j+1} = k'_j + b'_j q_{n_j} = k'_j + q_{n_j} (t_j d_j - k'_j \langle d_j \alpha \rangle).$$

Comme précédemment on obtient

$$\begin{aligned} |k'_{j+1}| &\leq 2C_j (d_{j-1} q_{n_{j-1}} + \frac{1}{2} q_{n_j} d_j + q_{n_j} \varepsilon_j) \\ &\leq 2C_j d_j q_{n_j} (\frac{q_{n_j-1}}{q_{n_j}} + \frac{1}{2} + \varepsilon_j). \end{aligned}$$

Comme  $a_{n_j+1} \geq 2$ , on obtient  $q_{n_j-1} < 2q_{n_j}$  d'où l'inégalité cherchée.

Les dernières inégalités se déduisent immédiatement de ce qui précède. Pour  $b'_j$  on a

$$|b'_j| \leq |t_j| d_j + |k'_j| |d_j \alpha| \leq 2C' d_j (1/2 + \varepsilon_j) < 2C' d_j.$$

Puisque  $d_j / a_{n_j+1} < \varepsilon_j$ , cela entraîne que  $t_j$  converge vers une limite  $t \in H_1(\alpha)$ , et on a

$$|t - t_j| \leq \sum_j^\infty |b'_j| \alpha_{n_j} \leq 2C' \varepsilon_j \sum_j^\infty a_{n_j+1} \alpha_{n_j},$$

d'où l'inégalité annoncée.  $\square$

Le théorème 7 résulte de la proposition suivante :

**Proposition 9** Avec les notations précédentes, pour tout irrationnel  $\alpha$  à quotients partiels non bornés, pour toutes les suites  $(\varepsilon_j)$ ,  $(n_j)$ ,  $(d_j)$  vérifiant les conditions (26) et (27), la limite inductive des groupes  $\mathbb{Z}^2$  avec les matrices de transition  $(A_j)$  données par (28) s'identifie à un sous-groupe  $\Gamma_\alpha$  de  $H_1(\alpha)$  dense dans  $\mathbb{R}$ , via l'homomorphisme  $\pi$  défini par :

$$\begin{aligned} \lim_{\rightarrow} (\mathbb{Z}^2, A_j) &\longrightarrow \Gamma_\alpha \\ (k'_j, l'_j)_j &\xrightarrow{\pi} \lim_{\infty} (k'_j \alpha - l'_j). \end{aligned}$$

De plus pour tout  $\beta > 0$  dans  $\Gamma_\alpha$ , on a  $\beta \notin \mathbb{Z}$ , et le relevé  $\tilde{e}(T_{\alpha, \beta})$  du groupe des valeurs propres de la tour de Kakutani associée dans  $\mathbb{R}$ ,  $T_{\alpha, \beta}$  est égal à  $\beta^{-1} \Gamma_\alpha$ .

Preuve : Nous justifions d'abord la définition de  $\Gamma_\alpha$ , ainsi que ses propriétés. La convergence de  $(k'_n\alpha - l'_n)$  résulte du lemme 17. La densité de  $\Gamma_\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  résulte de la dernière inégalité du lemme 17 : en effet, comme  $\alpha$  est irrationnel, il suffit de montrer qu'on peut approcher arbitrairement près un réel de la forme  $k'\alpha - l'$ . En construisant la suite  $(t_j)$  en partant de  $k', l'$  et d'un indice  $j_0$  assez grand, comme  $C'$  est indépendante de  $j_0$ , on peut obtenir  $C'\varepsilon_{j_0}\alpha_{n_{j_0-1}}$  et donc  $|t - t_{j_0}| = |t - (k'\alpha - l')|$  arbitrairement petit.

Montrons ensuite l'injectivité de  $\pi$  et l'absence d'entiers non nuls dans  $\Gamma_\alpha$ . Supposons avoir trouvé une suite  $(k'_j, l'_j)$  vérifiant  $\lim(k'_j\alpha - l'_j) \in \mathbb{Z}$ . En utilisant les notations du lemme on a pour tout  $j$  assez grand :

$$k'_j\alpha + \sum_j^\infty b'_j q_{n_i}\alpha = 0 \pmod{1}.$$

Or, le lemme 17 donne d'une part  $|b'_j| \leq 2C'd_j \leq 2C'\varepsilon_j a_{n_j+1}$  et d'autre part :

$$|k'_j| \leq 2C'd_{j-1}q_{n_{j-1}} \leq 2C'\varepsilon_{j-1}a_{n_{j-1}+1}q_{n_{j-1}} < 2C'\varepsilon_{j-1}q_{n_j}.$$

Par conséquent, dès que  $2C'\varepsilon_{j-1} < 1/2$  on doit avoir  $b'_j = k'_j = 0$  (cf lemme 1). On trouve donc que

$$0 = b'_j = k'_j c_j - l'_j d_j = -l'_j d_j,$$

c'est à dire que  $l'_j = 0$  pour tout  $j$  assez grand. On en conclut que  $\pi$  est bien injective et  $\Gamma_\alpha \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ .

Il reste maintenant à démontrer la dernière partie de la proposition. On choisit  $\beta > 0$  dans  $\Gamma_\alpha$ . Par définition c'est l'image par  $\pi$  d'une suite d'entiers  $(k_j, l_j)$  telle que  $k_j \neq 0$  à partir d'un certain rang  $J$ , et on peut donc écrire  $\beta = \beta_J + \sum_J^\infty b_j \langle q_{n_j} \alpha \rangle$  avec pour tout  $j \geq J$ ,

$$b_j = k_j c_j - l_j d_j \quad \text{et} \quad \beta_j = k_j \alpha - l_j \neq 0.$$

Il faut montrer  $\tilde{e}(T_{\alpha, \beta}) = \beta^{-1} \Gamma_\alpha$ . Supposons que  $t \in \Gamma_\alpha$  et posons  $s = t/\beta$ . Avec les notations précédentes, pour que  $(\beta, s, t)$  vérifie  $(*)$  il suffit de montrer que  $\sum_1^\infty (b'_j - s b_j)^2 < \infty$ . On a  $b'_j = d_j t_j - k'_j \langle d_j \alpha \rangle$ , de même  $b_j = d_j \beta_j - k_j \langle d_j \alpha \rangle$ , et d'après le lemme 17, pour tout  $j$  assez grand

$$\begin{aligned} |b'_j - s b_j| &\leq |t_j - s \beta_j| d_j + |k'_j - s k_j| |d_j \alpha| \\ &\leq d_j (|t - t_j| + |s| |\beta_j - \beta|) + \mathcal{O}(\varepsilon_j) \\ &\leq \mathcal{O}((d_j \alpha_{n_{j-1}} + 1) \varepsilon_j). \end{aligned}$$

Comme  $d_j \leq q_{n_j}$  on obtient  $d_j \alpha_{n_{j-1}} \leq 1$ , d'où le résultat puisque  $(\varepsilon_j)$  est sommable.

On suppose maintenant que  $s \in \tilde{e}(T_{\alpha, \beta})$  et  $t = s\beta$ , donc que  $(\beta, s, t)$  satisfait  $(*)$ . On écrit  $t = k'_1 \alpha - l'_1 + \sum_{j \geq 1} b'_j \langle q_{n_j} \alpha \rangle$ , avec  $b'_j = [b_j s]$  pour tout  $j$  assez grand, et  $t_j = k'_j \alpha - l'_j = k'_1 \alpha - l'_1 + \sum_{1 \leq i < j} b'_i \langle q_{n_i} \alpha \rangle$  pour tout  $j \geq 1$ . Alors  $k'_{j+1} = k'_j + b'_j q_j$ ,  $l'_{j+1} = l'_j + b'_j p_j$  pour  $j \geq 1$  et, pour montrer que  $t \in \Gamma_\alpha$ , il suffit de vérifier que pour tout  $j$  assez grand

$$[b_j s] = k'_j c_j - l'_j d_j.$$

On a toujours  $b_j = d_j \beta_j - k_j \langle d_j \alpha \rangle$  et aussi  $k'_j c_j - l'_j d_j = k'_j [d_j \alpha] - l'_j d_j = t_j d_j - k'_j \langle d_j \alpha \rangle$  donc, avec  $s_j = t_j / \beta_j$ ,

$$b_j s - (k'_j c_j - l'_j d_j) = d_j \beta_j (s - s_j) - (s k_j - k'_j) \langle d_j \alpha \rangle.$$

Comme pour  $j$  assez grand  $b'_j = [b_j s] = \mathcal{O}(d_j)$  d'après le lemme 17, il résulte encore de la récurrence sur les  $k'_j$  que  $k'_j = \mathcal{O}(d_{j-1}q_{j-1})$ . D'autre part  $s - s_j = o(\alpha_{n_j})$  d'après le lemme 12, donc

$$b_j s - (k'_j c_j - l'_j d_j) = \mathcal{O}(\varepsilon_j a_{n_j+1} \alpha_{n_j}) + \mathcal{O}(d_{j-1} q_{n_{j-1}} \|d_j \alpha\|) = \mathcal{O}(\varepsilon_j).$$

On en déduit que  $b_j s - (k'_j c_j - l'_j d_j)$  tend vers 0, d'où l'égalité cherchée.  $\square$

**Remarque :** On vérifie facilement que la réunion de tous les groupes  $\Gamma_\alpha$  obtenus pour tous les choix de suites  $(n_j)$  et  $(d_j)$  vérifiant (27) et (26) est non dénombrable.

## 7.2 Tours de Kakutani et odomètres.

Soit  $(\delta_n)$  une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 2 et  $D_n = \prod_{j < n} \delta_j$ . L'odomètre associé à  $(D_n)$  peut se définir comme l'action de la translation de 1 sur la limite projective de la suite :

$$\mathbb{Z}/D_1\mathbb{Z} \cdots \leftarrow \mathbb{Z}/D_n\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/D_{n+1}\mathbb{Z} \leftarrow \cdots.$$

Son groupe de valeurs propres est la réunion des  $(\frac{1}{D_n}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$  pour  $n \geq 1$ . La suspension de cette translation est un flot de translations sur le solénoïde associé à la même suite  $(\delta_n)$ , c'est à dire la limite projective des groupes  $\mathbb{T}$  avec les homomorphismes de transition  $x \mapsto \delta_n x$ . En effet, la suspension de l'odomètre est un flot de translations sur un groupe compact dont le groupe des valeurs propres est le relevé dans  $\mathbb{R}$  du groupe des valeurs propres de l'odomètre, c'est-à-dire  $\bigcup_{n \geq 1} \frac{1}{D_n}\mathbb{Z}$ , qui est le groupe dual du solénoïde. Plus précisément le plongement de  $\bigcup_{n \geq 1} \frac{1}{D_n}\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$  définit par dualité le flot de translations sur le solénoïde. Remarquons qu'un tel plongement est unique à homothétie près donc qu'il existe un unique flot de translations sur le solénoïde, à homothétie de temps près.

Ce paragraphe montre comment on peut obtenir des conjugaisons entre tours de Kakutani et odomètres et donc, avec les mêmes conditions, la conjugaison de flots  $\tau_{\alpha, \beta, \beta-1}$  avec des flots de translations sur des solénoïdes. L'idée consiste à remarquer que lorsque les matrices  $(A_n)$  de (28) sont de rang 1, le groupe  $\Gamma_\alpha$  est le dual d'un solénoïde. Le résultat suivant donne les constructions de (iii) et (v) du théorème 5, et par suspension les constructions de (iii) du théorème 3 pour  $\tau_{\alpha, \beta, \beta-1}$ . La partie (ii) du théorème 4 repose également sur cette construction.

**Théorème 8** Pour tout  $\alpha$  tel que  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|q\alpha\| = 0$ , il existe un ensemble non dénombrable dense de  $\beta$  tels que la tour de Kakutani  $T_{\alpha, \beta}$  soit conjuguée à un odomètre. Réciproquement, tout odomètre est conjugué à une tour de Kakutani  $T_{\alpha, \beta}$ , pour des irrationnels  $\alpha$  avec des propriétés d'approximation diophantiennes arbitrairement bonnes, et pour un choix dense de  $\beta$ .

### 7.2.1 Construction d'odomètres.

On se donne  $\alpha$  un irrationnel tel que  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|q\alpha\| = 0$ , et une suite  $(\varepsilon_n)$  positive strictement décroissante sommable. On choisit une sous-suite strictement croissante  $(q_{n_j})$  des dénominateurs de la fraction continue de  $\alpha$ , vérifiant pour tout  $n \geq 1$

$$q_{n_j}^2 \alpha_{n_j} \leq \varepsilon_j / 2. \quad (29)$$



Les matrices  $(A_j)$  définies par (28) sont de rang 1 si

$$\det(A_j) = \det \begin{pmatrix} 1+c_j q_{n_j} & -d_j q_{n_j} \\ c_j p_{n_j} & 1-d_j p_{n_j} \end{pmatrix} = 1 + c_j q_{n_j} - d_j p_{n_j} = 0.$$

Cette égalité est satisfaite pour un couple d'entiers positifs  $(c_j, d_j)$  minimal, celui des coefficients de Bezout de  $(q_{n_j}, p_{n_j})$  c'est à dire, selon la parité de  $n_j$ ,

$$\begin{cases} c_j = p_{n_j-1} & \text{si } n_j \text{ est impair et } p_{n_j} - p_{n_j-1} & \text{sinon} \\ d_j = q_{n_j-1} & \text{si } n_j \text{ est impair et } q_{n_j} - q_{n_j-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier la condition (29) permet d'assurer la validité de la proposition 9. En ommettant les sous-suites par souci de lisibilité, on écrit maintenant  $A_n = \begin{pmatrix} d_n \\ c_n \end{pmatrix} (p_n, -q_n)$ . Alors toute suite  $\begin{pmatrix} k_n \\ l_n \end{pmatrix}_n$  de la limite inductive de  $\mathbb{Z}^2$  par  $(A_n)$  vérifie pour  $n$  assez grand

$$\begin{pmatrix} k_{n+1} \\ l_{n+1} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} k_n \\ l_n \end{pmatrix} = (k_n p_n - l_n q_n) \begin{pmatrix} d_n \\ c_n \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Si on note pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n = \begin{pmatrix} d_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$ , alors  $u_n$  est invariant par  $A_{n-1}$  et on a

$$A_n u_n = \delta_n u_{n+1} \quad \text{où} \quad \delta_n = d_{n-1} p_n - c_{n-1} q_n. \quad (31)$$

Dans ces conditions, le groupe  $\Gamma_\alpha$  de la proposition 9 est de rang 1, et engendré par des réels  $(t^{(j)})_{j \geq 2}$  associés aux suites  $(v_n^{(j)})_n$  définies pour tout  $j \geq 2$  par

$$v_{j-1}^{(j)} = v_j^{(j)} = u_j \quad \text{et} \quad v_{n+1}^{(j)} = A_n v_n^{(j)} \quad \text{si } n \geq j.$$

Alors, pour tout  $j \geq 2$  donné, on a  $v_{j+1}^{(j)} = A_j u_j = \delta_j v_{j+1}^{(j+1)}$ , d'où pour tout  $n \geq j+1$  :

$$v_n^{(j)} = \delta_j v_n^{(j+1)}. \quad (32)$$

Par conséquent on peut écrire  $\Gamma_\alpha = \cup_{j \geq 2} t^{(j)} \mathbb{Z}$  avec  $t^{(j)} = \delta_j t^{(j+1)}$ .

Pour définir  $\beta$ , on part d'un vecteur non nul de  $\mathbb{Z}^2$ ,  $u_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}$ , tel que  $k_1 \alpha - l_1 > 0$  et on note  $C'$  la constante du lemme 17 : comme  $\Gamma_\alpha$  ne dépend pas des premiers indices, on peut toujours quitte à décaler d'un indice  $n_0$  supposer que

$$4C' \varepsilon_1 / q_1 < \|k_1 \alpha\|. \quad (33)$$

On définit alors pour tout  $n \geq 1$ ,  $v_n^{(1)} = \begin{pmatrix} k_n \\ l_n \end{pmatrix}$  par la récurrence  $v_{n+1}^{(1)} = A_n v_n^{(1)}$  et on note  $\beta = \lim(k_n \alpha - l_n)$ . La condition (33) et le lemme 17 permettent d'assurer que  $\beta > 0$ . En posant  $\delta_1 = k_1 p_1 - l_1 q_1$ , on obtient à l'aide de (31) que pour  $n \geq 1$

$$v_n^{(1)} = D_n u_n \quad \text{avec} \quad D_n = \prod_{1 \leq j < n} \delta_j.$$

En identifiant les coefficients avec (30), on trouve aussi pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= k_n p_n - l_n q_n \\ &= q_n \beta_n - k_n \alpha q_n \\ &= q_n \beta + \mathcal{O}((\beta - \beta_n) q_n + k_n \alpha_n) \\ &= q_n \beta + \mathcal{O}(4C' \varepsilon_n) \quad (\text{cf lemme 17}) \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut écrire

$$\Gamma_\alpha = \bigcup_{n \geq 1} \left( \frac{\beta}{D_{n+1}} \right) \mathbb{Z} \quad \text{avec } D_{n+1} = [\beta q_n] \text{ pour tout } n \text{ assez grand.}$$

Le groupe des valeurs propres de la tour de Kakutani  $T_{\alpha,\beta}$  est alors donnée par la proposition 9 :

$$e(T_{\alpha,\beta}) = \bigcup_{n \geq 2} \frac{1}{D_n} \mathbb{Z} \mod \mathbb{Z}.$$

Cette construction montre donc que le facteur de Kronecker de  $T_{\alpha,\beta}$  est bien l'odomètre  $(\Omega, S)$ , translation de 1 sur la limite projective de la suite de groupes  $(\mathbb{Z}/D_n\mathbb{Z})_n$  :

$$\mathbb{Z}/D_1\mathbb{Z} \cdots \leftarrow \mathbb{Z}/D_n\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/D_{n+1}\mathbb{Z} \cdots$$

**Remarque :** Il est clair par cette construction que l'ensemble des  $\beta$  obtenu est non dénombrable (en modifiant les choix des suites  $(q_n)$ ) et dense dans  $\mathbb{R}^+$  (en décalant, pour une condition initiale donnée à l'avance, les indices des suites vérifiant (29)).

### 7.2.2 Injectivité des fonctions propres sur l'odomètre.

On cherche maintenant à montrer qu'une tour de Kakutani,  $T_{\alpha,\beta}$ , obtenue par la construction précédente est conjuguée à l'odomètre. Notons  $F$  la fonction qui semi-conjuge  $(X_\beta, T_{\alpha,\beta})$  à son facteur Kronecker  $(\Omega, S)$ . Pour montrer la conjugaison, il suffit de prouver l'injectivité en mesure de  $F$  : autrement dit, il suffit de voir que sur un ensemble de mesure pleine, 2 points distincts ont des images distinctes par  $F$ . Comme  $\Omega$  est la limite projective de  $(\mathbb{Z}/D_n\mathbb{Z})_n$  on peut écrire  $F = (F_n)_n$ , où pour tout  $n \geq 1$ ,  $F_n$  est, à un facteur de normalisation près, la fonction propre de  $T_{\alpha,\beta}$  associée à  $s_n = 1/D_n$ . Il s'agit alors de trouver un ensemble de mesure pleine  $X'_\beta$  tel que pour tout couple de points distincts dans  $X'_\beta$  il existe  $n \geq 1$  pour lequel  $F_n(x) \neq F_n(x')$ . On doit donc étudier le comportement des fonctions propres de  $T_{\alpha,\beta}$  : comme on sait que celles-ci sont liées aux solutions  $\tilde{f}$  à l'équation

$$s\phi_\beta = t + \tilde{f} - \tilde{f} \circ T \mod 1, \quad (\text{voir chapitre 5})$$

on va d'abord décrire celles-ci sur  $\mathbb{T}$ , lorsque  $s$  est une valeur propre de  $T_{\alpha,\beta}$  et  $t = s\beta$ . Comme  $s$  est rationnel, en reprenant les notations des paragraphes 2.2.2 et 2.2.3, on peut écrire  $\tilde{f}$  comme une limite  $L^1$  des fonctions  $(\tilde{f}_n)$ , soit en posant  $\tilde{\theta}_n = \tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n \mod 1$ , pour tout  $n \geq 1$  :

$$\tilde{f} = \tilde{f}_n + \sum_n^\infty \tilde{\theta}_m \mod 1.$$

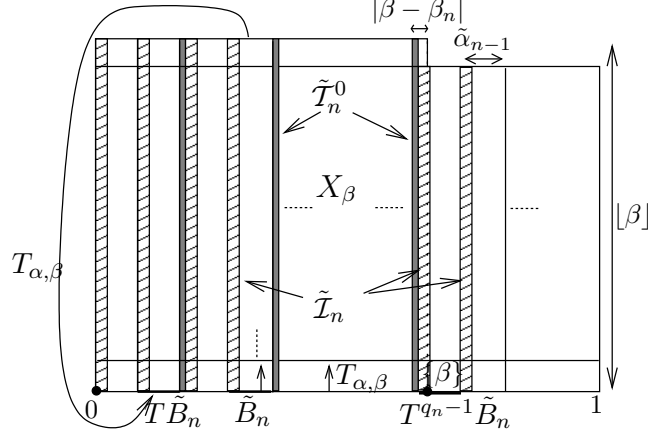
Supposons maintenant  $n \geq 1$  fixé, on pose  $s = 1/D_{n+1}$ , et on reprend les notations habituelles : pour tout  $m \geq n$

$$\begin{pmatrix} k_m \\ l_m \end{pmatrix} = v_m^{(1)}, \quad \beta_n = k_n\alpha - l_n, \\ \begin{pmatrix} k'_m \\ l'_m \end{pmatrix} = v_m^{(n+1)}, \quad t_m = k'_n\alpha - l'_n, \quad \text{et } s_m = t_m/\beta_m.$$

D'après (32), on a en fait pour tout  $m > n$ ,

$$\begin{pmatrix} k_m \\ l_m \end{pmatrix} = D_{n+1} \begin{pmatrix} k'_m \\ l'_m \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \frac{b'_m}{b_m} = \frac{t_m}{\beta_m} = s_m = s = 1/D_{n+1}.$$

Fig. 11 – Tour d'ordre  $n$  de  $T_{\alpha,\beta}$ .



A l'aide du paragraphe 2.2, on sait décrire l'allure de  $\tilde{f}$  sur la tour majeure d'ordre  $n$ ,  $(T^j B_n)_{0 \leq j < q_n}$ , associée à  $\alpha$  (voir figure 1) : on sait, par 2.2.2, que  $\tilde{f}_n$  et  $\tilde{\theta}_n$  sont affines sur les étages de la partie principale de la tour majeure d'ordre  $n$ . On en déduit, comme  $\tilde{f}_{n+1} = \tilde{f}_n + \tilde{\theta}_n$  que  $\tilde{f}_{n+1}$  est encore affine sur ces étages et de pente  $sk_{n+1} - k'_{n+1} = 0$ . De plus, si  $m > n$ ,  $\tilde{\theta}_m$  est aussi affine par morceaux et de pente constante  $sb_m - b'_m = 0$ . A l'aide de (12) et de la convergence de la série  $(\tilde{\theta}_m)$  on en déduit que  $\tilde{\theta}_m$  est nulle en dehors de  $\mathcal{I}_m$  (voir lemme 8). Par conséquent, en dehors de  $\mathcal{J}_n = \cup_{m \geq n} \mathcal{I}_m$  on a  $\tilde{f} = \tilde{f}_{n+1}$ . Il en résulte que, en dehors de  $\mathcal{J}_n$ ,  $\tilde{f}$  envoie chaque étage de la partie principale de la tour majeure d'ordre  $n$  sur une constante.

Supposons pour l'instant que  $\beta > 1$ , et reprenons l'expression de la fonction propre de  $T_{\alpha,\beta}$  associée à  $s$  : elle s'écrit pour tout  $(x, y) \in X_\beta$  sous la forme  $F_{n+1}(x, y) = sy + \tilde{f}(x) \pmod{1}$  (cf chapitre 5). Par conséquent, en dehors du relevé  $\tilde{\mathcal{J}}_n$  de  $\mathcal{J}_n$  dans  $X_\beta$ ,  $F_{n+1}$  prend des valeurs constantes sur tous les ensembles de la forme  $T^j B_n \times \{k\}$  inclus dans  $X_\beta$ .

On peut préciser la nature de ces ensembles pour tout  $n \geq 1$  : comme  $\beta$  n'apparaît que sur le dernier étage de la tour majeure d'ordre  $n$ , ces ensembles constituent une tour de base  $\tilde{B}_n = B_n \times \{0\}$  associée à  $T_{\alpha,\beta}$ , pour tous les indices  $(j, k)$  tels que  $0 \leq k < \mathbf{1}_{[0,\beta[}(T^j B_n)$  si  $0 \leq j < q_n - 1$  et  $0 \leq k < [\beta]$  si  $j = q_n - 1$  (voir figure 11).

Posons  $\tilde{q}_{n-1}$  le dénominateur précédent immédiatement  $q_n$  dans la suite des réduites de  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}_{n-1} = \|\tilde{q}_{n-1}\alpha\|$ . Si on note  $h_n$  la hauteur de cette tour, en considérant sa masse totale dans  $X_\beta$  on obtient :

$$\beta = \tilde{\alpha}_{n-1} h_n + |\beta - \beta_n| + \mathcal{O}_1((\beta + 1)\alpha_n \tilde{q}_{n-1}).$$

D'après le lemme 17, on a  $|\beta - \beta_n| = \mathcal{O}(\varepsilon_n \tilde{\alpha}_{n-1})$ . De plus avec (29) on a aussi  $1/\tilde{\alpha}_{n-1} = q_n + \mathcal{O}(\varepsilon_n)$ , ce qui donne finalement

$$h_n = \beta q_n + \mathcal{O}(\varepsilon_n) = D_{n+1}.$$

Pour tout  $n$  assez grand, le relevé dans  $X_\beta$  de la tour majeure d'ordre  $n$  pour la rotation d'angle  $\alpha$  est donc une tour associée à  $T_{\alpha,\beta}$ , de base  $\tilde{B}_n$ , et de hauteur

$D_{n+1}$ .

Comme  $F_{n+1}$  envoie, en dehors de  $\tilde{\mathcal{J}}_n$ , chacun de ces  $D_{n+1}$  étages sur une valeur dans  $1/D_{n+1}\mathbb{Z}$ , et que  $F_{n+1}$  conjugue  $T_{\alpha,\beta}$  à la translation de  $1/D_{n+1}$  sur cet ensemble, on en déduit qu'elle est injective, en dehors de  $\tilde{\mathcal{J}}_n$ , sur les étages de la tour  $(T_{\alpha,\beta}^j \tilde{B}_n)_{0 \leq j < D_{n+1}}$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , la tour recouvre  $X_\beta$  à un ensemble  $\Delta_n$  près, constitué du relevé dans  $X_\beta$  de la tour mineure d'ordre  $n$  (voir 2.3.1) et de l'intervalle  $[\beta_n, \beta] \times \{0\}$ . Alors  $\lambda_\beta(\Delta_n) \leq |\beta_n - \beta| + (\beta + 1)\alpha_n q_n = \mathcal{O}(\varepsilon_n/q_n)$  qui est sommable. Par conséquent  $\Delta = \overline{\lim} \tilde{\mathcal{I}}_n \cup \Delta_n$  est de mesure nulle. Comme la suite des tours  $(T_{\alpha,\beta}^j \tilde{B}_n)_{0 \leq j < D_{n+1}}$  engendre la tribu de  $X_\beta$ , pour tout couple de points distincts de  $X_\beta \setminus \Delta$  on peut trouver  $n$  tel que  $x$  et  $x'$  soient sur 2 étages disjoints de la tour d'ordre  $n$ , en dehors de  $\tilde{\mathcal{J}}_n$  : dans ces conditions, on a bien  $F_{n+1}(x) \neq F_{n+1}(x')$ .

Lorsque  $0 < \beta < 1$ , le raisonnement est analogue : la fonction propre associée à  $s = 1/D_{n+1}$ ,  $F_{n+1}$ , est la restriction à  $X_\beta = [0, \beta[$  de  $\tilde{f}$ . Elle est donc constante sur les étages  $T^j B_n$  inclus dans  $[0, \beta[$ , en dehors de  $\mathcal{J}_n$ . Mais comme les itérés successifs de  $B_n$  dans  $X_\beta$  sont exactement les étages de la tour pour l'induit, il suffit de calculer la hauteur de celle-ci,  $h_n$  : en décomposant l'intervalle  $[0, \beta[$  dans  $\mathcal{D}_n(\beta)$  (cf 2.3.1), on a encore  $\beta = \tilde{\alpha}_{n-1} h_n + \mathcal{O}_1(|\beta - \beta_n| + \alpha_n q_n)$  et le reste de la preuve est inchangé.

### 7.2.3 Les odomètres comme tours de Kakutani.

On se donne à présent un odomètre  $(\Omega, S)$  défini par

$$\mathbb{Z}/D_1\mathbb{Z} \cdots \leftarrow \mathbb{Z}/D_n\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/D_{n+1}\mathbb{Z} \cdots,$$

où  $(D_n)$  est une suite d'entiers donnée telle que  $D_n$  divise  $D_{n+1}$ . Bien entendu, quitte à choisir une sous-suite de  $(D_n)$ , on peut choisir une suite de diviseurs  $\delta_n = D_{n+1}/D_n$  aussi grande qu'on veut sans modifier l'odomètre.

On veut construire une suite  $(p_n/q_n)$  de réduites et une suite  $(k_n, l_n)$  de sorte qu'on se trouve dans le cadre de la construction précédente : il suffit pour cela de vérifier que si  $(p_n/q_n)$  sont les réduites d'un nombre  $\alpha$ , la condition (29) est satisfaite pour une suite  $(\varepsilon_n)$  sommable et que  $(k_n, l_n)$  est bien dans la limite inductive de la suite des groupes  $\mathbb{Z}^2$  avec les matrices  $(A_n)$  données par la construction. Ceci permet d'assurer que la tour de Kakutani ainsi construite est isomorphe à un odomètre. Il faut ensuite voir qu'on peut choisir les suites précédentes de sorte que l'odomètre obtenu soit exactement  $\Omega$  : pour cela, il suffit d'avoir

$$\delta_1 = k_1 p_1 - l_1 q_1 \quad \text{et pour tout } n \geq 1 \quad \delta_n = p_n d_{n-1} - q_n c_{n-1}.$$

Notons  $(a_n)$  la suite des quotients partiels associée à  $\alpha$  : on a vu que lorsque  $n$  est impair, pour que  $A_n$  soit de rang 1 il faut que  $d_n = \tilde{q}_{n-1}$  et  $c_n = \tilde{p}_{n-1}$  où  $\tilde{p}_{n-1}/\tilde{q}_{n-1}$  est la réduite précédent immédiatement  $p_n/q_n$ . Dans la construction suivante, on prend la suite complète des réduites  $(p_n/q_n)$ . On obtient dans ce cas que pour tout  $n$  impair on a  $\delta_{n+1} = p_{n+1} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n+1} = a_{n+1}$ . Lorsque  $n$  est pair et non nul, on a alors  $\delta_{n+1} = a_{n+1} + 1$ .

On construit maintenant  $(a_n)$ , et  $(k_n, l_n)$  par récurrence : pour  $n = 0$  on définit comme d'habitude  $p_0 = a_0 = 0$  et  $q_0 = 1$ . Pour  $n = 1$ , on choisit  $\delta_1$  et

$a_1$  de sorte que  $a_1$  ne divise pas  $\delta_1$ . On pose  $p_1 = 1$  et  $q_1 = a_1$  puis on choisit  $(k_1, l_1)$  tels qu'on ait  $\delta_1 = k_1 - l_1 a_1$ .

On choisit maintenant une suite  $(\varepsilon_n)$  strictement décroissante positive sommable de somme inférieure à 1, de sorte que  $10(|k_1| + |l_1|)\varepsilon_1 < 1$  : si on note  $C'$  la constante du lemme 17 associée à  $(k_1, l_1)$ , l'inégalité donne simplement  $3C'\varepsilon_1 < 1$ .

Supposons avoir défini  $a_j, (k_j, l_j)$  jusqu'à l'ordre  $n$  de sorte que (29) soit vérifiée : pour définir  $a_{n+1}$ , il suffit de choisir  $\delta_{n+1}$  tel que  $q_n < \varepsilon_n(\delta_{n+1} - 1)$  et de prendre  $a_{n+1} = \delta_{n+1}$  si  $n$  est impair et  $\delta_{n+1} - 1$  sinon.  $p_{n+1}$  et  $q_{n+1}$  sont alors définies par la récurrence classique des fractions continues, et on pose bien sûr  $\begin{pmatrix} k_{n+1} \\ l_{n+1} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} k_n \\ l_n \end{pmatrix}$ .

On a bien défini dans cette construction un irrationnel  $\alpha$  et une suite de réduites associée  $(p_n/q_n)$  qui vérifient pour tout  $n \geq 1$ ,  $q_n \leq \varepsilon_n a_{n+1}$ , ce qui entraîne (29). Posons  $\beta = \lim_n (k_n \alpha - l_n)$ , pour montrer que l'odomètre  $\Omega$  est isomorphe à la tour de Kakutani  $T_{\alpha, \beta}$ , il suffit de vérifier que  $\beta > 0$ . D'après le lemme 17, on a  $\beta = \beta_1 + \mathcal{O}_1(2C'\varepsilon_1/q_1)$ ; d'autre part on avait  $\delta_1 = k_1 p_1 - l_1 q_1$  d'où

$$\beta_1 = k_1(q_1 \alpha - p_1)/q_1 + \delta_1/q_1 = \delta_1/q_1 + \mathcal{O}_1(k_1/(a_2 q_1^2)) = \delta_1 + \mathcal{O}_1(C'\varepsilon_1/q_1^3).$$

On obtient finalement la relation  $\beta = \delta_1/a_1 + \mathcal{O}_1(3C'\varepsilon_1/a_1)$ . Comme on a  $3C'\varepsilon_1 < 1$  et qu'on a choisi  $\delta_1/a_1$  positif, non entier, on obtient bien par cette construction que  $\beta > 0$ . Cette dernière relation montre évidemment la densité des paramètres  $\beta$  possibles.

### 7.3 Isomorphismes non triviaux avec des rotations irrationnelles.

Dans ce paragraphe, nous obtenons pour un choix particulier de la suite  $(d_j)$  définie au premier paragraphe des exemples de tours de Kakutani  $T_{\alpha, \beta}$  conjuguées à des rotations irrationnelles. Le résultat suivant montre les parties (ii) et (iv) du théorème 5, et par suspension le point (ii) du théorème 3 et (i) du théorème 4.

**Théorème 9** Pour tout  $\alpha$  tel que  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|q\alpha\| = 0$ , il existe un ensemble non dénombrable dense dans  $\mathbb{R}_+$  de  $\beta$  tels que  $T_{\alpha, \beta}$  soit conjugué à une rotation irrationnelle sur le cercle. Réciproquement, toute rotation irrationnelle du cercle d'angle  $s$  vérifiant  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|qs\| = 0$  est conjuguée à une tour de Kakutani  $T_{\alpha, \beta}$ , pour un choix non dénombrable de paramètres, et dense en  $\beta$ .

Le paragraphe est composé de trois sous-paragraphe : le premier donne, pour  $\alpha$  donné vérifiant  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|q\alpha\| = 0$ , une construction particulière de  $\Gamma_\alpha$  qui est dans ce cas un sous-groupe de rang 2. Le second sous-paragraphe prouve la première partie du théorème 9, pour cette construction. Le troisième sous-paragraphe établit la partie réciproque.

#### 7.3.1 Construction, propriétés diophantiennes de la valeur propre.

Soit  $\alpha$  un irrationnel vérifiant  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|q\alpha\| = 0$ . On garde, aux indices près, les notations précédentes. Ici  $(\varepsilon_n)$  est une suite positive sommable strictement

décroissante dont la série des restes converge. On choisit une sous-suite  $(p_n/q_n)$  de réduites de la fraction continue de  $\alpha$  vérifiant pour tout  $n \geq 1$  :

$$q_n^2 \alpha_n < \varepsilon_n$$

On pose  $d_n = q_n$  (les relations (26) et (27) sont donc vérifiées) et  $c_n = [d_n \alpha] = p_n$ . La matrice de la relation (28) s'écrit alors pour tout  $n \geq 1$  :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 + p_n q_n & -q_n^2 \\ p_n^2 & 1 - p_n q_n \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas particulier, on a  $\det(A_n) = 1$  pour tout  $n$  : la limite inductive de  $\mathbb{Z}^2$  par la suite  $(A_n)$  est donc isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ .

Le groupe  $\Gamma_\alpha$  de la proposition 9 est alors de rang 2 sur  $\mathbb{Z}$ , et l'isomorphisme de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\Gamma_\alpha$  est donné par  $(k'_1, l'_1) \mapsto t = \pi((k'_n, l'_n)_n)$ . Par conséquent, tout choix d'entiers  $(k_1, l_1), (k'_1, l'_1)$  tels que  $k'_1 l_1 - k_1 l'_1 = 1$  donne une base  $(\beta, t)$  de  $\Gamma_\alpha$ .

On choisit  $(k_1, l_1)$  un couple d'entiers premiers entre eux, on associe la suite  $(k_n, l_n)$  de la limite inductive de  $\mathbb{Z}^2$  par  $(A_n)$  et le réel  $\beta$  de  $\Gamma_\alpha$  correspondant. Alors on peut écrire  $\Gamma_\alpha = \beta\mathbb{Z} + t\mathbb{Z}$  où  $t$  est l'élément associé à une suite  $(k'_n, l'_n)$  issue d'un couple  $(k'_1, l'_1)$  vérifiant  $k'_1 l_1 - k_1 l'_1 = 1$ .

Lorsque  $\beta > 0$ , la proposition 9 donne alors :

$$e(T_{\alpha, \beta}) = \beta^{-1} \Gamma_\alpha \mod \mathbb{Z} = t\beta^{-1} \mathbb{Z} \mod \mathbb{Z}.$$

Notons  $s = t/\beta$ , le but des 2 sous-paragraphe suivants est d'établir une conjugaison entre  $T_{\alpha, \beta}$  et la rotation sur  $\mathbb{T}$  d'angle  $s$ , qu'on notera  $R_s$ . Nous donnons dans un premier temps les propriétés diophantiennes de  $s$ .

On reprend les notations précédentes : les suites  $(k_n, l_n), (k'_n, l'_n)$  et  $(b_n, b'_n)$  sont données pour tout  $n \geq 1$  par les relations matricielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} k_{n+1} & k'_{n+1} \\ l_{n+1} & l'_{n+1} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} k_n & k'_n \\ l_n & l'_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_n \\ b'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_n & k_n \\ -l'_n & k'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Enfin,  $(\beta_n), (t_n)$  et  $(s_n)$  sont définies par

$$\beta_n = k_n \alpha - l_n, \quad t_n = k'_n \alpha - l'_n, \quad s_n = t_n / \beta_n.$$

Notons que  $b_n = \beta_n q_n - k_n < q_n \alpha >$  et que pour  $n$  assez grand on a aussi :

$$b_n = [\beta q_n] \quad \text{et} \quad b'_n = [b_n s].$$

On rappelle les résultats du lemme 12 :

$$(t - t_n) = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon_n}{q_n}\right), \quad (\beta - \beta_n) = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon_n}{q_n}\right) \quad (35)$$

$$\max(k_n, k'_n) = \mathcal{O}(q_{n-1}^2), \quad \text{et} \quad (s - s_n) = o(\alpha_n). \quad (36)$$

**Lemme 18** Avec les notations précédentes, si  $\alpha$  vérifie  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|q\alpha\| = 0$ , alors le groupe  $\Gamma_\alpha$  est engendré par deux réels  $\beta$  et  $t$  rationnellement indépendants. Pour  $s = t/\beta$ , on a alors  $b_n = [q_n \beta]$  et  $|b_n s - b'_n| \sim \alpha_n / \beta$ . En particulier,  $(b'_n / b_n)$  est une sous-suite des réduites de  $s$ , qui satisfait donc aussi  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|qs\| = 0$ .

Preuve : D'après la proposition 9, on sait que  $(\beta, s, t)$  satisfait  $(*)$  : par conséquent,  $(b_n s - b'_n)$  converge vers 0. Comme  $b_n = [\beta q_n]$  est arbitrairement grand, si  $s$  était rationnel  $b_n$  et  $b'_n$  auraient nécessairement un facteur commun. Il suffit donc de voir que dans cette construction  $b_n$  et  $b'_n$  sont premiers entre eux. Comme  $A_n$  est de déterminant 1, on obtient  $\begin{vmatrix} k'_n & k_n \\ l'_n & l_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k'_1 & k_1 \\ l'_1 & l_1 \end{vmatrix} = 1$ . D'autre part on a, d'après les relations précédentes,

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_n & -l_n \\ k'_n & -l'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

$(b_n, b'_n)$  est donc l'image par une isométrie de  $\mathbb{Z}^2$  de  $(p_n, q_n)$  qui est irréductible dans  $\mathbb{Z}^2$ , donc  $b_n$  et  $b'_n$  sont bien premiers entre eux.

Pour montrer la suite, on commence par une première estimation de  $b_n s - b'_n$  : comme  $s - s_n = o(\alpha_n)$ , on a

$$\begin{aligned} b_n s - b'_n &= b_n(s - s_n) + \frac{1}{\beta_n}(b_n t_n - b'_n \beta_n) \\ &= o(q_n \alpha_n) + \frac{<\alpha q_n>}{\beta_n}(k'_n \beta_n - k_n t_n) \\ &= o(q_n \alpha_n) + \frac{<\alpha q_n>}{\beta_n}(k_n l'_n - k'_n l_n) \\ &= o(q_n \alpha_n) + \frac{<\alpha q_n>}{\beta_n}. \end{aligned}$$

On obtient donc que  $(b_n s - b'_n) = o(\varepsilon_n / q_n)$ . Comme d'après le lemme 17,  $b_n = \mathcal{O}(q_n)$ , on en déduit que  $b_n |b_n s - b'_n| = o(\varepsilon_n)$ , ce qui permet d'affirmer que  $(b'_n / b_n)$  sont bien des réduites de  $s$ . Pour affiner notre estimation, on réinjecte notre première relation dans l'expression de  $(s - s_n)$  :

$$\beta_n(s - s_n) = \sum_{j \geq n} (b_j s - b'_j) <\alpha q_j> = o\left(\sum_{j \geq n} \varepsilon_j \alpha_j / q_j\right) = o(\varepsilon_n \alpha_n / q_n).$$

Par conséquent,  $b_n(s - s_n) = o(\varepsilon_n \alpha_n)$ , et la première estimation devient donc bien  $|b_n s - b'_n| \sim \alpha_n / \beta$ .

Comme  $b_n = [\beta q_n]$ , il en résulte immédiatement que  $b_n^2 \|b_n s\| = \mathcal{O}(q_n^2 \alpha_n)$  tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

### 7.3.2 Tours de Kakutani conjuguées à une rotation.

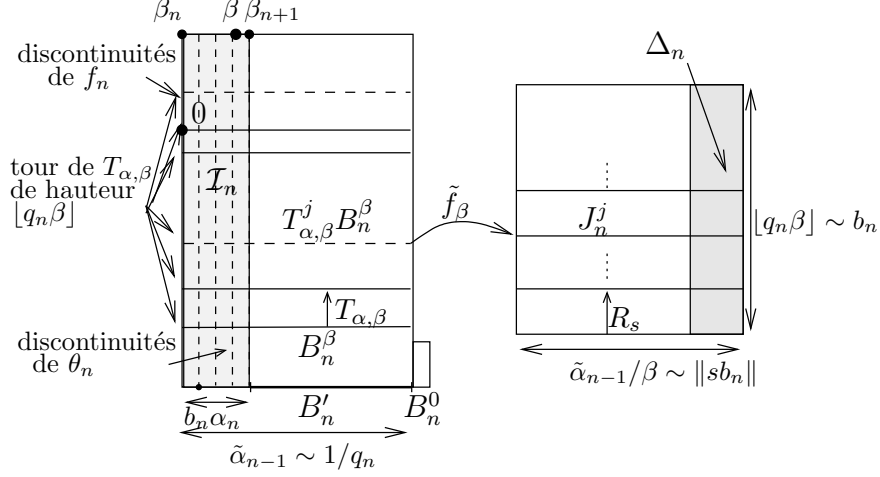
Soit  $\alpha$  un irrationnel donné, vérifiant  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|q\alpha\| = 0$ . On note comme précédemment  $\beta > 0$  et  $t$  des générateurs de  $\Gamma_\alpha$  et on pose  $s = t/\beta$ .

Notons  $R_s$  la rotation de  $s$  sur  $\mathbb{T}$ , et  $f_\beta$  la fonction propre de  $T_{\alpha, \beta}$  associée à  $s$ . Il s'agit de montrer que  $\tilde{f}_\beta$  est un isomorphisme de  $(X_\beta, \lambda_\beta, T_{\alpha, \beta})$  sur  $(\mathbb{T}, \lambda, R_s)$  (en notation additive). Comme  $s$  est irrationnel, l'unique ergodicité de  $R_s$  montre que la mesure image de  $\lambda_\beta$  par  $\tilde{f}_\beta$  est égale à  $\lambda$ .  $\tilde{f}_\beta$  est donc surjective sur un ensemble de mesure de Lebesgue pleine, et il reste à montrer que  $\tilde{f}_\beta$  est injective en dehors d'un ensemble de mesure 0.

On reprend les notations du paragraphe 2.2.2. Pour éviter les confusions, on note  $\tilde{q}_{n-1}$  le dénominateur précédent  $q_n$  dans la suite des réduites de  $\alpha$  et  $\tilde{\alpha}_{n-1} = \|\tilde{q}_{n-1} \alpha\|$ . Les conditions diophantiennes sur  $\alpha$  donnent l'approximation :

$$\tilde{\alpha}_{n-1} = 1/q_n(1 + \mathcal{O}(\varepsilon_n/q_n)).$$

Fig. 12 – Tour induite d'ordre  $n$ .



On rappelle que  $f_\beta$  est donnée à l'aide de la fonction de transfert  $f$  où  $\tilde{f}$  est solution de  $s\phi_\beta = -t + \tilde{f} - \tilde{f}T \pmod{1}$ . On sait d'après le paragraphe 3.2 qu' en choisissant  $\tilde{\theta}_n = 0$  au milieu de  $B'_n$ , la suite des fonctions  $(f_n)$  converge vers  $f$ . Dans cette construction, la convergence est très forte : regardons l'allure de  $\tilde{f}_n$  sur la tour majeure associée à  $\mathcal{D}_n(\beta)$  (cf figure 12).  $\tilde{f}_n$  est affine sur chaque étage de la tour et de pente  $sk_n - k'_n$ . À l'aide des estimations (35) et (36) on obtient ici :

$$sk_n - k'_n = \frac{1}{\beta_n}(t_n k_n - \beta_n k'_n) + k_n(s - s_n) = \frac{1}{\beta_n} + o(k_n \alpha_n) = \frac{1}{\beta} + \mathcal{O}(\varepsilon_n/q_n).$$

Par conséquent, la pente de  $\tilde{f}_n$  est de l'ordre de  $\frac{1}{\beta}$ . D'autre part, en dehors de  $\mathcal{I}_n$  (défini selon (10)), on sait que  $\tilde{\theta}_n$  est uniformément petit (cf lemme 8). Plus précisément ici on a, d'après (12),

$$\|\tilde{\theta}_n \mathbf{1}_{\mathcal{I}_n^c}\|_\infty \leq q_n \alpha_n |b'_n - b_n s| + \|\tilde{\theta}_n \mathbf{1}_{B'_n \cup B_n^0}\|_\infty.$$

Comme on a choisi  $\tilde{\theta}_n = 0$  au milieu de  $B'_n$ , et que  $\tilde{\theta}_n$  est affine de pente  $q_n(b_n s - b'_n)$  sur  $B'_n \cup B_n^0$ , on obtient que

$$\|\tilde{\theta}_n \mathbf{1}_{\mathcal{I}_n^c}\| \leq |b_n s - b'_n| \leq \mathcal{O}(\alpha_n).$$

De plus on a  $\lambda(\mathcal{I}_n) = \alpha_n |b_n| q_n = \mathcal{O}(\varepsilon_n)$  dont la série converge, d'où  $\lambda(\overline{\lim} \mathcal{I}_n) = 0$ . On en déduit que  $f_n$  converge vers  $f$  en dehors de cet ensemble, et plus précisément, si  $\mathcal{J}_n = \cup_{m \geq n} \mathcal{I}_m$ , on a

$$\|(\tilde{f} - \tilde{f}_n) \mathbf{1}_{\mathcal{J}_n^c}\|_\infty \leq \sum_{m \geq n} \alpha_m \leq \mathcal{O}(\alpha_n).$$

Il en résulte,  $\tilde{f}_n$  étant affine sur chaque étage de la tour majeure  $T^j B_n$ , que  $\tilde{f}$  envoie  $T^j B_n \cap \mathcal{J}_n^c$  sur un ensemble inclus dans un intervalle de longueur  $\tilde{\alpha}_{n-1}(\frac{1}{\beta} + \mathcal{O}(\varepsilon_n))$  ( $\mathcal{O}$  est bien sûr uniforme pour  $0 \leq j < q_n$ ).

Revenons maintenant à  $\tilde{f}_\beta$  :



Lorsque  $\beta \in ]0, 1[$  (cas de l'induit),  $f_\beta$  est la restriction de  $\tilde{f}$  à l'intervalle  $[0, \beta[$ . Comme la tour  $\mathcal{D}_n(\beta)$  est constituée d'intervalles ne contenant ni 0 ni  $\beta$  (sauf le dernier étage),  $[0, \beta[$  est égal à une réunion d'étages de  $\mathcal{D}_n$ , à un ensemble de mesure  $\tilde{\alpha}_{n-1}$  près (le dernier étage). De plus la tour mineure est de mesure  $\alpha_n \tilde{q}_{n-1} \leq \varepsilon_n / q_n$ , donc  $[0, \beta[$  est égal, à un ensemble de mesure  $\mathcal{O}(1/q_n)$  près, à une réunion de  $[\beta q_n]$  étages de la tour majeure. Notons  $B_n^\beta$  correspondant à l'étage le plus bas dans la tour majeure, alors  $(T_{\alpha, \beta}^j B_n^\beta)_{0 \leq j < [\beta q_n]}$  est une tour d'intervalles pour la transformation induite  $T_{\alpha, \beta}$ . (cf figure 12)

D'après ce qui précède, on peut associer à chaque  $T_{\alpha, \beta}^j B_n^\beta$ , un intervalle  $J_n^j$  de longueur  $\tilde{\alpha}_{n-1}(\frac{1}{\beta} + \mathcal{O}(\varepsilon_n))$  (uniforme en  $j$ ) contenant  $\tilde{f}_\beta(T_{\alpha, \beta}^j B_n^\beta \cap \mathcal{J}_n^c)$ . Il reste à vérifier que l'ensemble de tous ces intervalles forme une partition, à un ensemble de mesure sommable près : comme la somme des mesures de ces ensembles est inférieure à  $1 + \mathcal{O}(\varepsilon_n)$ , on minore la mesure de leur réunion :

$$\begin{aligned} \lambda(\cup_{0 \leq j < [\beta q_n]} J_n^j) &\geq \lambda_\beta(\cup_{0 \leq j < [\beta q_n]} T_{\alpha, \beta}^j B_n^\beta \cap \mathcal{J}_n^c) \\ &\geq \sum_{j=0}^{[\beta q_n]} \lambda_\beta(T_{\alpha, \beta}^j B_n^\beta) - \lambda_\beta(\mathcal{J}_n) \\ &\geq 1 - \mathcal{O}(1/q_n) - \mathcal{O}(\sum_n^\infty \varepsilon_m). \end{aligned}$$

Par conséquent, si on note  $\Delta_n = \cup_j (J_n^j \cap \cup_{i \neq j} J_n^i)$ , les ensembles  $(J_n^j \cap \Delta_n)_j$  sont 2 à 2 disjoints, et on a

$$0 \leq \lambda(\Delta_n) \leq \sum_0^{[\beta q_n]} \lambda(J_n^j) - \lambda(\cup_{0 \leq j < [\beta q_n]} J_n^j) \leq \mathcal{O}(\sum_n^\infty \varepsilon_m) + \mathcal{O}(1/q_n).$$

En dehors de  $f_\beta^{-1}(\overline{\lim} \Delta_n) \cup \overline{\lim} \mathcal{I}_n \cup \overline{\lim} (\cup_0^{q_n-1} T^j B_n^0)$  qui est de mesure nulle (car  $\sum_n^\infty \varepsilon_m$  est sommable), l'injectivité de  $f_\beta$  est immédiate, ce qui montre la conjugaison avec  $R_s$ .

Lorsque  $\beta > 1$ , le raisonnement est identique au cas précédent, en remarquant comme dans la preuve du théorème 8 que les relevés des tours majeures dans  $X_\beta$  sont de base  $B_n \times \{0\}$  et de hauteur  $h_n = [\beta q_n]$  (voir figure 11).  $\square$

### 7.3.3 Des rotations comme tours de Kakutani.

Ce paragraphe est consacré à la partie réciproque du théorème 9.

On se donne ici un irrationnel  $s$  vérifiant  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|qs\| = 0$ . Pour  $(\varepsilon_n)$  une suite sommable strictement décroissante, de restes sommables, on choisit, parmi les réduites de  $s$  deux suites strictement croissantes  $(b_n)$  et  $(b'_n)$  vérifiant pour tout  $n$

$$b_n^2 |b_n s - b'_n| < \varepsilon_n. \quad (37)$$

On cherche à construire deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  de sorte que  $(b_n)$  et  $(b'_n)$  vérifient, avec les notations précédentes, la construction du paragraphe 7.3.1. Dans ce cas, on pourra appliquer la première partie du théorème 9, et assurer ainsi la conjugaison de  $T_{\alpha, \beta}$  avec son facteur discret (celui-ci est bien la rotation d'angle  $s$ , car  $(b_n s - b'_n)$  tend vers 0). Pour construire  $\alpha$  et  $\beta$ , il nous suffit de construire une sous-suite  $(p_n/q_n)$  des réduites de  $\alpha$  et les suites  $(k_n, l_n)$ . Supposons pour

l'instant avoir trouvé  $\alpha$  et ses réduites ; d'après 7.3.1, sous la condition initiale que  $\begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k'_1 \\ l'_1 \end{pmatrix}$  soit une base (directe) de  $\mathbb{Z}^2$ , les relations (34) caractérisent les suites  $\begin{pmatrix} k_n & k'_n \\ l_n & l'_n \end{pmatrix}$  et la suite  $\begin{pmatrix} b_n \\ b'_n \end{pmatrix}$ . Ces relations sont équivalentes aux égalités pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_n & l_n \\ k'_n & l'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ -q_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} k_{n+1} & l_{n+1} \\ k'_{n+1} & l'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_n & l_n \\ k'_n & l'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_n \\ b'_n \end{pmatrix} (q_n, p_n).$$

Comme par construction,  $A_n$  est une isométrie directe,  $\begin{pmatrix} k_n & l_n \\ k'_n & l'_n \end{pmatrix}$  est encore une isométrie et on peut donc inverser la première relation. On obtient alors que les conditions (34) sont encore équivalentes à : pour tout  $n \geq 1$

$$\begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k'_n & k_n \\ l'_n & l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ -b'_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} k'_{n+1} & l'_{n+1} \\ k_{n+1} & l_{n+1} \end{pmatrix} = B_n \begin{pmatrix} k'_n & l'_n \\ k_n & l_n \end{pmatrix},$$

où  $B_n$  est la matrice définie par :

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 + b_n b'_n & -b_n'^2 \\ b_n^2 & 1 - b_n b'_n \end{pmatrix}.$$

On reconnait à présent la construction du sous-paragraphe 7.3.1 pour l'irrationnel  $1/s$  : comme  $(b_n, b'_n)$  sont premier entre eux et qu'on a

$$b_n'^2 |b'_n/s - b_n| = s \left( \frac{b'_n}{s b_n} \right)^2 |b_n s - b'_n b_n^2| = \mathcal{O}(\varepsilon_n),$$

on peut appliquer la proposition 9 pour la suite de matrices  $(B_n)$ . La limite inductive de  $\mathbb{Z}^2$  par  $(B_n)$  est donc un sous-groupe dense de  $\mathbb{R}$ , de rang 2, et dont le quotient de 2 générateurs quelconques est un nombre irrationnel, qu'on note  $\alpha$ . De plus, d'après le lemme 18,  $\alpha$  satisfait  $\inf_{q \neq 0} q^2 \|q\alpha\| = 0$ , et  $(p_n/q_n)$  est bien une sous-suite des réduites de  $\alpha$  qui vérifie  $q_n^2 |q_n \alpha - p_n| = \mathcal{O}(\varepsilon_n)$ .

Par conséquent, la suite  $\begin{pmatrix} k_n & k'_n \\ l_n & l'_n \end{pmatrix}$  construite à l'aide de la suite  $(B_n)$  vérifie aussi les relations (34) pour  $\alpha$ . En appliquant la première partie du théorème 9, on a donc bien défini un réel  $\beta$  de sorte que  $T_{\alpha, \beta}$  soit conjuguée à la rotation irrationnelle d'angle  $s$ .

La densité du paramètre  $\beta$  résulte de la densité de  $\{k\alpha - l, (k, l) = 1\}$  et du lemme 17 : il suffit de remarquer que la construction précédente peut se faire à partir d'un rang  $n_1$  choisi comme on veut ; comme d'après le lemme 17 on a  $|\beta - \beta_{n_1}| \leq 2C'\varepsilon_{n_1}$ , et que  $C'$  ne dépend pas de  $\alpha$ , on peut choisir  $n_1$  de sorte que le majorant soit arbitrairement petit.

Expliquons maintenant pourquoi l'ensemble des paramètres  $(\alpha, \beta)$  convenant est non dénombrable : pour un irrationnel  $s$  fixé, il est clair que le choix des sous-suites des réduites vérifiant l'hypothèse (37) est non dénombrable. Revenons maintenant au paragraphe 7.3.1 : avec la construction de  $\alpha$  à l'aide de  $(B_n)$ , on obtient des dénominateurs  $(q_n)$  qui s'écrivent pour tout  $n$  assez grand sous la forme  $q_n = [\beta_s b'_n]$ , où  $\beta_s$  est un générateur quelconque de  $\Gamma_{1/s}$ . Comme l'hypothèse (37) impose que  $b'_n = o(\tilde{b}'_{n+1})$  ( $\tilde{b}'_{n+1}$  est le dénominateur suivant  $b'_n$  dans la suite des réduites de  $1/s$ ), on en déduit facilement que l'ensemble des suites  $(q_n)$  obtenues pour un  $s$  donné est non dénombrable. Il en résulte que, ou bien l'ensemble des irrationnels  $\alpha$  est non dénombrable, ou bien qu'on peut trouver un  $\alpha$  pour lequel on sait construire un ensemble non dénombrable de réduites associées : dans ce dernier cas, l'unicité de la décomposition de  $\beta$  le long de la suite  $(q_n)$  montre que l'ensemble des  $\beta$  obtenus est non dénombrable.  $\square$

## 8 Régularisation des flots spéciaux.

Dans ce chapitre nous montrons la proposition suivante, qui permettra de terminer les preuves des théorèmes 3 et 4.

**Proposition 10** Soit  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ ,  $(q_n)_n$  une sous-suite des dénominateurs des réduites de  $\alpha$  et  $(b_n)_n$  une suite d'entiers non nuls. Pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$  vérifiant  $\beta = \sum_1^\infty b_n q_n \alpha \pmod{1}$ , on a les propriétés suivantes :

- Si  $\sum_0^\infty (|b_n| q_n^{k+1} \|q_n \alpha\|)^{1/(k+2)} < \infty$ , alors  $\phi_\beta$  est additivement cohomologue à une fonction  $\psi$  de  $C^k(\mathbb{T})$  de norme infinie arbitrairement petite.
- Si  $\sum_0^\infty \frac{q_n \ln(n|b_n|)}{-\ln(\|q_n \alpha\|)} < \infty$ , alors la fonction  $\phi_\beta$  est additivement cohomologue à une fonction  $\psi$  de  $C^\omega(\mathbb{T})$  de norme infinie arbitrairement petite.

### 8.1 Notations

On rappelle ici les notations utiles dans ce paragraphe :  $\alpha$  est un irrationnel fixé et  $T$  la rotation du cercle d'angle  $\alpha$ . On note  $(q_n)$  une sous-suite des dénominateurs des réduites associées à  $\alpha$  et  $\alpha_n = \|\alpha q_n\|$ . Pour un réel  $\beta$  de  $H_1(\alpha)$ , on note  $(b_n)$  une suite d'entiers non nuls telle que  $\beta = \sum_{n \geq 0} b_n \langle q_n \alpha \rangle$ , avec  $\sum_n |b_n| q_n \alpha_n < \infty$ . On définit  $(k_n)_n$  par  $k_n = \sum_0^{n-1} b_j q_j$  pour tout  $n \geq 1$  et  $k_0 = 0$ .

D'après 2.1.1, on a en dehors de  $\beta$

$$\phi_\beta = \sum_0^\infty \phi_n \quad \text{où} \quad \phi_n = \phi_{b_n q_n \alpha} \circ T^{k_n}.$$

On a vu (cf 2.1.1) que pour tout  $n$ ,  $\phi_n$  est un cobord additif, de fonction de transfert  $\omega_{b_n q_n} \circ T^{k_n}$  qu'on notera  $h_n$ . Alors on peut écrire pour tout  $n$ ,  $\phi_n = h_n - h_n \circ T$  où  $h_n$  est une fonction affine par morceaux, de pente constante égale à  $b_n q_n$ , admettant  $|b_n q_n|$  sauts de taille 1, en des points situés dans  $\mathcal{I}_n$  (cf figure 1). On note  $\mathcal{T}_n = \cup_{0 \leq j < q_n} T^j B'_n$  la réunion des étages de la partie principale de la tour majeure d'ordre  $n$  (cf paragraphe 2.2.2 et figure 1).  $h_n$  est définie à une constante près, qu'on choisira de sorte que  $h_n$  s'annule sur la base  $B'_n$ .

On appelle maintenant  $(K_n)$  une suite de noyaux continus, positifs symétriques, normés dans  $L^1(\mathbb{T})$ . Lorsque la série converge, on définit

$$\psi = \sum_0^\infty \phi_n \star K_n.$$

Nous précisons dans ce qui suit les conditions générales sur  $(K_n)$  pour que  $\psi$  soit régulière, puis pour qu'elle soit cohomologue à  $\phi_\beta$ . La synthèse de ces deux critères permet ensuite d'obtenir la proposition 10.

## 8.2 Critères de cohomologie et de régularité.

**Lemme 19** Avec les notations précédentes, les fonctions  $\psi$  et  $\phi_\beta$  sont cohomologues s'il existe une suite  $(\varepsilon_n)$  strictement positive pour laquelle on ait

$$\sum_n \varepsilon_n q_n < +\infty, \text{ et} \quad (38)$$

$$\sum_n |b_n| \int_{|t| \geq \varepsilon_n} K_n(t) dt < +\infty. \quad (39)$$

Preuve : Comme on a  $\phi_n = h_n - h_n \text{circ} T$ , il suffit de montrer que  $\sum_n (h_n - h_n \star K_n)$  converge presque sûrement. Comme  $h_n$  est affine sur les étages de  $\mathcal{T}_n$  et que  $K_n$  est symétrique,  $h_n \star K_n$  est proche de  $h_n$  sur une grande proportion de  $\mathcal{T}_n$ .

Si  $\varepsilon_n \in ]0, \alpha_{n-1}/2[$  on appelle  $B_n''$  le sous-intervalle centré de  $B_n'$  de longueur  $\lambda(B_n'') = \lambda(B_n') - 2\varepsilon_n$ , puis on note  $\Delta_n$  la sous-tour de  $\mathcal{T}_n$  de base  $B_n''$ . Alors on a

$$\lambda(\Delta_n^c) = \varepsilon_n q_n + b_n \alpha_n q_n + \alpha_n q_{n-1},$$

qui est sommable d'après (38) et le choix de  $\beta$  (dans  $H_1(\alpha)$ ). Par conséquent  $\varprojlim \Delta_n^c$  est de mesure nulle.

Soit maintenant  $x \in \Delta_n$  fixé, alors par construction de  $\Delta_n$ ,  $h_n$  est affine sur un intervalle symétrique autour de  $x$  de longueur au moins  $\varepsilon_n$ , et on peut écrire :

$$\begin{aligned} h_n(x) - h_n \star K_n(x) &= \int_{\mathbb{T}} (h_n(x) - h_n(x-t)) K_n(t) dt \\ &= \int_{|t| \leq \varepsilon_n} b_n q_n t K_n(t) dt + \mathcal{O}(\|h_n\|_\infty \int_{|t| \geq \varepsilon_n} K_n(t) dt) \\ &= \mathcal{O}(\|h_n\|_\infty) \int_{|t| \geq \varepsilon_n} K_n(t) dt. \quad (K_n \text{ étant symétrique}). \end{aligned}$$

On reste à estimer la norme infinie de  $h_n$  : comme sur  $B_n' \cup B_n^0$ ,  $h_n$  est une fonction affine par morceaux de pente  $b_n q_n$  et qu'elle s'annule sur  $B_n'$ , on obtient  $\|h_n \mathbf{1}_{B_n' \cup B_n^0}\|_\infty = \mathcal{O}(b_n)$ . Sur  $B_n$ ,  $h_n$  admet  $b_n$  sauts de taille 1, ce qui donne encore  $\|h_n \mathbf{1}_{B_n}\|_\infty = \mathcal{O}(b_n)$ . Enfin, la relation  $\phi_n = h_n - h_n \circ T$  montre que pour tout  $k \in \{1, \dots, q_n - 1\}$  et  $x \in B_n$  on a l'égalité  $h_n(T^k x) = h_n(x) + k b_n \langle \alpha q_n \rangle$ , et que celle-ci est encore vraie pour  $x \in B_n^0$  et  $k \in \{1, \dots, q_{n-1} - 1\}$ . Il en résulte que  $\|h_n\|_\infty = \mathcal{O}(b_n)$ .

On en déduit avec l'hypothèse (39) que pour tout  $x \notin \overline{\varprojlim \Delta_n^c}$ , la série  $s(x) = \sum_n (h_n - h_n \star K_n)(x)$  est convergente. La fonction  $s$  est donc bien définie presque partout et vérifie la relation  $\phi_\beta - \psi = s - s \circ T$ .  $\square$

**Lemme 20** Avec les notations précédentes, pour tout  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\psi$  est de classe  $C^r$  si  $K_n$  est de classe  $C^r$  pour tout  $n$  et si on a pour tout  $k \leq r$ ,

$$\sum_n |b_n| \alpha_n \|K_n^{(k)}\|_\infty < +\infty. \quad (40)$$

De plus, si  $K_n$  est analytique pour tout  $n$ , alors  $\psi$  est analytique si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!} \sum_n |b_n| \alpha_n \|K_n^{(k)}\|_\infty = 0. \quad (41)$$

Preuve : La preuve est complètement élémentaire : il suffit d'estimer la norme infinie des dérivées  $k$ -ième de  $\phi_n \star K_n$  : remarquons que  $\phi_n = b_n \langle q_n \alpha \rangle$  en dehors de  $[\beta_n, \beta_{n+1}]$  qui est un intervalle de longueur  $|b_n| \alpha_n$ . On obtient donc pour tout  $k$  tel que  $K_n^{(k)}$  soit bien défini,

$$\|(\phi_n \star K_n)^{(k)}\| \leq \|\phi_n\|_1 \|K_n^{(k)}\|_\infty \leq 2|b_n| \alpha_n \|K_n^{(k)}\|_\infty.$$

□

### 8.3 Preuve de la proposition 10.

#### 8.3.1 $\phi_\beta$ cohomologue à une fonction de $C^r(\mathbb{T})$ .

On suppose que  $\beta = \sum_n b_n q_n \alpha \pmod{1}$  avec

$$\sum_n (q_n^{r+1} |b_n| \alpha_n)^{1/(r+2)} < \infty.$$

Nous allons choisir convenablement la suite des noyaux  $(K_n)$  pour que les conditions (38), (39) et (40) des lemmes 20 et 19 soient vérifiées. Pour cela on se donne un noyau,  $K$ , positif symétrique de classe  $C^r(\mathbb{R})$ , nul en dehors de  $] -1/2, 1/2[$  et tel que  $\|K\|_1 = 1$ . Si  $(\delta_n)_n$  est une suite de  $[0, 1]$  de limite nulle, on définit pour tout  $x \in \mathbb{T}$ ,  $K_n(x) = K(\langle x \rangle / \delta_n) / \delta_n$ . Alors  $K_n$  est un noyau positif symétrique de  $C^r(\mathbb{T})$ , nul en dehors de  $] -\delta_n, \delta_n[$  et tel que  $\|K_n\|_1 = 1$ . Posons maintenant  $\varepsilon_n = \delta_n$ , les conditions (38) et (39) sont vérifiées dès que

$$\sum_{n \geq 1} \delta_n q_n < \infty.$$

Pour la régularité, pour tout  $k \leq r$ , on a  $\|K_n^{(k)}\|_\infty = \mathcal{O}(\delta_n^{-(k+1)})$ . Par conséquent, pour que (40) soit satisfaite il suffit que  $(\delta_n)$  vérifie la condition :

$$\sum_{n \geq 1} |b_n| \alpha_n / \delta_n^{r+1} < \infty.$$

Choisissons maintenant  $\delta_n = (|b_n| \alpha_n / q_n)^{1/(r+2)}$  (de sorte que  $q_n \delta_n = |b_n| \alpha_n / \delta_n^{r+1}$ ) : on trouve comme condition suffisante :

$$\sum_{n \geq 1} (q_n^{r+1} |b_n| \alpha_n)^{1/(r+2)} < \infty,$$

qui est l'hypothèse de la première partie de la proposition 10. Pour montrer que  $\psi$  peut être choisie arbitrairement petite, il suffit de remarquer que pour tout  $n_0$ ,  $\phi_{k_{n_0} \alpha}$  est un cobord additif : par conséquent  $\phi_\beta$  est cohomologue à  $\sum_{n_0}^\infty \phi_n \star K_n$ , pour tout  $n_0$ . Comme d'après le lemme 20,  $(\|\phi_n \star K_n\|_\infty)$  est sommable, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut toujours trouver  $n_0$  de sorte que  $\|\sum_{n_0}^\infty \phi_n \star K_n\|_\infty < \varepsilon$ .

#### 8.3.2 $\phi_\beta$ cohomologue à une fonction analytique.

On suppose maintenant que  $\beta = \sum_n b_n q_n \alpha \pmod{1}$  avec

$$\sum_n \frac{q_n \ln(n|b_n|)}{-\ln(\alpha_n)} < +\infty.$$

Il s'agit de choisir une suite  $(K_n)$  de noyaux positifs symétriques analytiques et normés dans  $L^1(\mathbb{T})$  qui vérifient les conditions (38), (39) et (41). On pose pour tout  $n \geq 1$  et  $t \in \mathbb{T}$ ,

$$K_n(t) = c_n \left( \frac{\sin(\pi m_n t)}{m_n \sin(\pi t)} \right)^{r_n},$$

où  $r_n$  est un entier pair et  $m_n$  un entier positif.  $c_n$  est donné de sorte que  $\|K_n\|_1 = 1$ . On a :

$$\begin{aligned} \|K_n\|_1 &\geq c_n \int_{1/2 \geq |t|} \left( \frac{\sin(\pi m_n t)}{\pi m_n t} \right)^{r_n} dt \\ &\geq \frac{c_n}{m_n} \int_{m_n/2 \geq |t|} \left( \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right)^{r_n} dt \sim C \frac{c_n}{m_n \sqrt{r_n}}. \end{aligned}$$

Par conséquent  $c_n = \mathcal{O}(m_n \sqrt{r_n})$ . Les noyaux  $(K_n)$  ainsi choisis sont bien positifs, symétriques et normés dans  $L^1(\mathbb{T})$ . De plus, comme  $K_n$  est proportionnel à  $(F_{m_n})^{r_n/2}$ , où  $F_m$  est le noyau de Fejer d'ordre  $m$ , on a aussi  $\hat{K}_n(j) = 0$  pour tout  $|j| \geq m_n r_n/2$ . En particulier pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a

$$\|K_n^{(k)}\|_\infty \leq (2\pi)^k \sum_{|j| < m_n r_n/2} j^k \leq \frac{1}{k+1} (\pi m_n r_n)^{k+1}.$$

Pour vérifier la condition (41), il suffit donc de choisir  $(m_n)$  et  $(r_n)$  de sorte que

$$\sum_n |b_n| \alpha_n e^{\pi m_n r_n} < +\infty.$$

Supposons  $r_n$  donné, et posons  $m_n = \lfloor -\ln(\alpha_n)/(2\pi r_n) \rfloor$ . On obtient alors

$$|b_n| \alpha_n e^{\pi m_n r_n} \leq |b_n| \alpha_n^{1/2}.$$

D'après l'hypothèse, on a  $\ln(|b_n|) = o(|\ln(\alpha_n)|)$ , d'où  $|b_n| \alpha_n^{1/2} = o(\frac{1}{-\ln(\alpha_n)})$  qui est sommable, et la condition (41) est donc satisfaite.

En ce qui concerne les conditions de cohomologie du lemme 19, on doit choisir  $(\varepsilon_n)$  le plus petit possible (pour minimiser la condition (38)) de sorte qu'on ait (39). On a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \int_{1/2 \geq |t| > \varepsilon_n} K_n(t) dt &\leq c_n \int_{|t| > \varepsilon_n} \left( \frac{1}{2m_n t} \right)^{r_n} dt \\ &\leq \mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{r_n}} (2m_n \varepsilon_n)^{-r_n+1} \right). \end{aligned}$$

Posons  $\varepsilon_n = e/(2m_n)$ , alors la condition (39) est satisfaite si  $\sum_n |b_n| e^{-r_n} < +\infty$ . Il suffit donc de poser  $r_n = 2[\ln(n|b_n|) + 1]$ , ce qui donne

$$q_n \varepsilon_n = \frac{q_n e}{2m_n} \sim \frac{2\pi e q_n \ln(n|b_n|)}{-\ln(\alpha_n)}.$$

La condition (38) est donc vérifiée par hypothèse, ce qui termine la preuve de la proposition 10. La norme infinie des fonctions cohomologues à  $\phi$  est arbitrairement proche de 0 pour les mêmes raisons que dans le cas précédent.

## 8.4 Preuve des parties régulières des théorèmes 3 et 4.

D'après les chapitres précédents, nous savons construire des flots spéciaux de fonction plafond  $1 + \gamma\phi_\beta$  avec les propriétés (i), (ii) ou (iii) du théorème 3. Pour montrer qu'on peut régulariser cette fonction plafond sans modifier le type de la transformation, il suffit de montrer que  $\phi_\beta$  est cohomologue (additivement) à une fonction régulière,  $\psi$  telle que  $\|\psi\|\|\gamma\| < 1$ . D'après la proposition 10, cette dernière contrainte n'en est pas une. Il reste donc à vérifier dans chacune des constructions des propriétés (i), (ii) et (iii), qu'on peut choisir les suites  $(b_n)$  et les sous-suites  $(q_n)$  des dénominateurs des réduites de  $\alpha$  de sorte que les conditions de la proposition 10 soient vérifiées. Comme on a dans toutes les constructions  $b_n = \mathcal{O}(q_n)$ , ces conditions conduisent bien à celles énoncées dans le théorème 3, et se vérifient facilement en modifiant les conditions sur les  $q_n$ . En ce qui concerne la preuve du théorème 4, (ii) se vérifie facilement à l'aide du lemme 18, et (i) s'obtient sans difficulté à partir de la preuve du théorème 8.

## 9 Appendice. Les sous-groupes $H_\gamma(\alpha)$ des approximations par les fractions continues.

On rappelle d'abord un lemme classique, qui montre l'unicité de la décomposition d'Ostrowski :

**Lemme 21** Soit  $k$  et  $(b_n)$  des entiers vérifiant

$$k\alpha = \sum_{n=n_1}^{\infty} b_n \langle q_n \alpha \rangle \pmod{1}.$$

Si  $|k| < q_{n_1}$  et  $|b_n| \leq a_{n+1}/2$  pour tout  $n \geq n_1$ , alors on doit avoir  $k = b_n = 0$  pour tout  $n \geq n_1$ .

Preuve : On montre d'abord que  $k = 0$  : supposons  $k \neq 0$ , comme  $|k| < q_{n_1}$  on aurait donc  $\|k\alpha\| \geq \alpha_{n_1-1}$ . Mais on a aussi

$$\left| \sum_{n=n_1}^{\infty} b_n \langle q_n \alpha \rangle \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n_1}^{\infty} a_{n+1} \alpha_n \leq \frac{1}{2} (\alpha_{n_1-1} + \alpha_{n_1}) < \alpha_{n_1-1},$$

ce qui est impossible.

Maintenant on peut écrire  $b_{n_1} q_{n_1} \alpha = \sum_{n_1+1}^{\infty} b_n \langle q_n \alpha \rangle \pmod{1}$ , où  $|b_{n_1} q_{n_1}| < a_{n_1+1} q_{n_1} < q_{n_1+1}$  : on obtient en appliquant ce qui précède que  $b_{n_1} = 0$  puis que  $b_n = 0$  pour tout  $n \geq n_1$ .  $\square$

Il s'agit maintenant de démontrer la proposition 1, dont on rappelle l'énoncé :

**Proposition 1** Soit  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , alors on a pour tout  $\gamma > 0$ ,

$$\begin{aligned} H_\gamma(\alpha) &= \{x \in \mathbb{T}, \sum_n \|q_n x\|^\gamma < +\infty\} \text{ et} \\ H_\infty(\alpha) &= \{x \in \mathbb{T}, \|q_n x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}. \end{aligned}$$

Preuve : Posons  $\theta = (\sqrt{5} - 1)/2$ , grâce aux relations de récurrence de  $(q_n)$  et  $(\alpha_n)$ , on a immédiatement les inégalités, pour tout  $n \leq m$  :

$$\alpha_m \leq \theta^{m-n-1} \alpha_n, \quad q_n \leq \theta^{m-n-1} q_m.$$

Supposons que  $\beta = \sum_{n \geq 0} b_n \langle q_n \alpha \rangle$ . On a dans ce cas  $\|q_n \alpha_m\| = \|q_m \alpha_n\| \leq \theta^{|m-n|-1} q_m \alpha_m$ , d'où on obtient

$$\|\beta q_n\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \|\alpha_m q_n\| \leq \sum_m (|b_m| \alpha_m q_m \theta^{|m-n|-1}).$$

Si  $\sum_m (|b_m| \alpha_m q_m)^\gamma < \infty$  avec  $\gamma \geq 1$ , le terme de droite est la convolution d'une suite sommable avec une suite de  $l^\gamma(\mathbb{Z})$ , ce qui montre bien que  $\sum_n \|q_n \beta\|^\gamma < \infty$ . Si  $\gamma < 1$ , on a  $\|q_n \beta\|^\gamma \leq \sum_m (|b_m| \|\alpha_m q_n\|)^\gamma$ , d'où on tire

$$\sum_n \|q_n \beta\|^\gamma \leq \sum_m (|b_m| \alpha_m q_m)^\gamma \sum_n \theta^{\gamma(|m-n|-1)}.$$

Pour la réciproque, on suppose maintenant que  $\sum \|q_n \beta\|^\gamma < \infty$ . On note  $k_n \in \{-q_n/2, \dots, q_n/2\}$  tel que  $\|\beta - k_n p_n / q_n\| = \min(|\beta - l / q_n|, l \in \mathbb{N})$ . Alors  $\|\beta - k_n p_n / q_n\| = \|\beta q_n\| / q_n$  d'où

$$\|\beta - k_n \alpha\| \leq \|\beta - k_n p_n / q_n\| + |k_n| \alpha_n / q_n \leq \|q_n \beta\| / q_n + \alpha_n / 2.$$

En particulier  $k_n \alpha \rightarrow \beta$ . D'autre part on a aussi

$$\begin{aligned} k_{n+1} p_{n+1} / q_{n+1} - k_n p_n / q_n &= \frac{1}{q_{n+1} q_n} (k_{n+1} ((-1)^n + p_n q_{n+1}) - k_n p_n q_{n+1}) \\ &= (-1)^n \frac{k_{n+1}}{q_{n+1} q_n} + (k_{n+1} - k_n) \frac{p_n}{q_n}. \end{aligned}$$

On obtient que

$$\|(k_{n+1} - k_n) p_n / q_n\| \leq 1 / (2q_n) + \|q_{n+1} \beta\| / q_{n+1} + \|q_n \beta\| / q_n < 1 / q_n$$

pour tout  $n$  assez grand (car  $\|q_n \beta\| \rightarrow 0$  par hypothèse). Par conséquent, on a bien  $k_{n+1} = k_n + b_n q_n$  pour  $n$  assez grand, et  $\beta = \sum_n b_n \langle q_n \alpha \rangle$ . En réinjectant dans l'égalité précédente, on obtient lorsque  $b_n \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{|b_n|}{2a_{n+1}} &\leq \frac{|b_n + k_n / q_n|}{a_{n+1}} \\ &\leq \frac{q_{n+1}}{a_{n+1}} \left| \frac{k_n}{q_n q_{n+1}} + \frac{b_n}{q_{n+1}} \right| \\ &\leq 2q_n (\|q_n \beta\| / q_n + \|q_{n+1} \beta\| / q_{n+1}) \leq 2(\|q_n \beta\| + \|q_{n+1} \beta\|). \end{aligned}$$

Ceci clôt la preuve de la proposition.  $\square$

**Remarque :** Nous obtenons grâce à ce résultat une représentation géométrique simple de  $H_\infty(\alpha)$  dans les tours associées aux fractions continues. On reprend les notations du paragraphe 2.3.3. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on appelle  $\mathcal{V}_n(\varepsilon)$  le rectangle de  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  centré en 0,

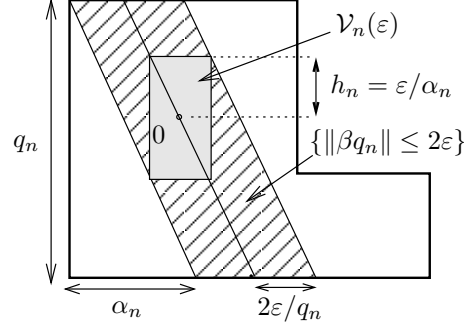
$$\mathcal{V}_n(\varepsilon) = ]-\varepsilon / q_n, \varepsilon / q_n[ \times \{-h_n, \dots, h_n\}, \quad \text{où } h_n = \min(q_n / 2, [\varepsilon / \alpha_n]).$$

Si l'on note indifféremment un élément  $\beta \in \mathbb{T}$  et ses représentants dans un domaine fondamental d'ordre  $n$ ,  $\mathcal{D}_n(x)$ , la proposition 1 montre qu'on a

$$\|\beta q_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \text{pour tout } \varepsilon > 0, \beta \in \varprojlim \mathcal{V}_n(\varepsilon). \quad (42)$$



Fig. 13 – Représentation de  $\mathcal{V}_n(\varepsilon)$  dans un domaine d'ordre  $n$ .



En effet  $\|\beta q_n\| \rightarrow 0$  signifie que  $\beta \in H_\infty(\alpha)$  d'où  $\beta = \sum b_n q_n \alpha$  avec  $b_n = o(a_{n+1})$ . Par conséquent en notant  $k_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k q_k$ , on a aussi  $\beta = k_n \alpha + x_n$  où  $k_n = o(q_n)$  et  $x_n = o(1/q_n)$ . Il en résulte que pour tout  $\varepsilon > 0$  (plus petit que  $1/2$ ), on a pour tout  $n$  assez grand,  $|k_n| \leq \varepsilon q_n \leq h_n$  et  $|x_n| \leq \varepsilon/q_n$  c'est à dire que  $\beta \in \mathcal{V}_n(\varepsilon)$ .

Inversement, soit  $\varepsilon > 0$  et  $\beta \in \mathcal{V}_n(\varepsilon)$  pour tout  $n$  assez grand. C'est à dire que  $\beta = k_n \alpha + x_n$  où  $|x_n| \leq \varepsilon/q_n$  et  $|k_n| \leq \min(\varepsilon/\alpha_n, q_n/2)$ . Alors  $\|\beta q_n\| = \|k_n q_n \alpha + x_n q_n\| \leq |k_n| \alpha_n + |x_n| q_n$ . On a  $|k_n| \alpha_n \leq h_n \alpha_n \leq \min(\varepsilon, q_n \alpha_n/2) \leq \varepsilon$  et donc  $\|\beta q_n\| \leq 2\varepsilon$ , ce qui montre bien l'équivalence. Ces propriétés peuvent se représenter selon la figure 13.

## Références

- [1] H. Anzai. Ergodic skew product transformations on the torus. Osaka J. Math., 3 :83–99, 1951.
- [2] A. Avila and G. Forni. Weak mixing for interval exchange transformations and translations flows. preprint, 2004.
- [3] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, and Ya.G. Sinai. Ergodic Theory. Springer-Verlag, 1981.
- [4] B. Fayad. Weak mixing for reparameterized linear flows on the torus. Ergodic Theory Dyn. Syst., 22 :187–201, 2002.
- [5] B. Fayad, A. Katok, and A. Windsor. Mixed spectrum reparameterizations of linear flows on  $\mathbb{T}^2$ . Mosc. Math. J, 1 :521–537, 2001.
- [6] S. Ferenczi, C. Holton, and L. Zamboni. Structure of three-interval exchange transformations. III. J. Anal. Math., 93 :103–137, 2004.
- [7] M. Guenais. Singularité des produits de Anzai associés aux fonctions indicatrices d'un intervalle. Bull. Soc. math. France, 127 :71–93, 1999.
- [8] B. Host, J.F. Méla, and F. Parreau. Non singular transformations and spectral analysis of measures. Bull. Soc. math. France, 119 :33–90, 1991.
- [9] A.B. Katok. Interval exchange transformations and some special flows are not mixing. Israel J. Math, 35 :301–310, 1980.

- [10] A.B. Katok and E.A. Robinson (Jr). Cocycles, cohomology and combinatorial constructions in ergodic theory. In Proc. Sympos. Pure Math., volume 69, pages 107–173, Providence, RI, 2001. Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999), Amer. Math. Soc.
- [11] A.B. Katok and A.M. Stepin. Approximations of ergodic dynamic systems by periodic transformations. Soviet. Math. Dokl., 7 :1638–1641, 1966.
- [12] A.B. Katok and A.M. Stepin. Approximations in ergodic theory. Russian Math. Surveys, 22 :77–102, 1967.
- [13] M. Keane. Interval exchange transformations. Math. Z, 141 :25–31, 1975.
- [14] A. Khinchin. Continued Fractions. University of Chicago Press, 1964.
- [15] A.V. Kocergin. The absence of mixing in special flows over a rotation of the circle and in flows on a two-dimensional torus (russian). Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 205 :515–518, 1972.
- [16] A.N. Kolmogorov. On dynamical systems with an integral invariant on the torus. (russian). Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 93 :763–766, 1953.
- [17] M. Lemańczyk and E. Lesigne. Ergodicity of Rokhlin cocycles. J. Anal. Math., 85 :43–86, 2001.
- [18] M. Lemańczyk and F. Parreau. Rokhlin extensions and lifting disjointness. Ergodic Theory Dynam. System., 23 :1525–1550, 2003.
- [19] H. Masur. Interval exchange transformations and measured foliations. Ann. of Math., 115 :169–200, 1982.
- [20] K.D. Merrill. Cohomology of step functions under irrational rotations. Isr. J. of Math., 52 :320–340, 1985.
- [21] C. Moore and K. Schmidt. Coboundaries and homomorphisms for non-singular actions and a problem of H. Helson. Proc. London Math. Soc., 40 :443–475, 1980.
- [22] M. Nadkarni. Basic ergodic theory. Basler Lehrbucher, birkhauser-verlag basel edition, 1995.
- [23] I. Oren. Ergodicity of cylinder flows arising from irregularities of distribution. Israel J. Math., 44 :127–138, 1983.
- [24] F. Parreau. Ergodicité et pureté des produits de Riesz. Ann. Inst. Fourier, 40 :391–405, 1990.
- [25] M. Queffélec. Substitution Dynamical Systems- Spectral Analysis. In A. Dold and B. Eckmann, editors, Lecture Notes in Mathematics, volume 1294. Springer-Verlag, 1987.
- [26] V Sós. On the theory of Diophantine approximations II : Inhomogeneous problems. Acta Math. Acad. Sc. Hung., 9 :229–241, 1958.
- [27] M. Stewart. Irregularities of uniform distribution. Acta Math. Acad. Sc. Hung., 37 :1–39, 1981.
- [28] W.A. Veech. Strict ergodicity in zero dimensional dynamical systems and the Kronecker-Weyl theorem modulo 2. Trans. A.M.S., 140 :1–33, 1969.
- [29] W.A. Veech. Gauss measures for transformations on the space of interval exchange transformations. Ann. of Math., 115 :201–242, 1982.
- [30] J. von Neumann. Zur Operatormethoden in der klassischen Mechanik. Ann. of Math., 33 :587–642, 1932.